Математический анализ
Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Лекция 3.2

Аннотация

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Порядок роста функции.

1 Производная в экстремальных точках

*Теорема (теорема Ферма)**

Если функция определена в некоторой окрестности точки c, дифференцируема в самой точке c и принимает в ней наибольшее или наименьшее значение, то ее производная в этой точке равна нулю.

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(c)$ точки c и принимает в этой точке наибольшее значение. Тогда

$$\forall x \in U(c) \ f(x) \leq f(c).$$

Соответственно,

$$\text{если } x < c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \quad (1)$$

$$\text{если } x > c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \quad (2)$$

Перейдем к пределу в данных неравенствах при $x \to c$:

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'_-(c) \geq 0,$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'_+(c) \leq 0.$$

Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке c, то в этой точке существует ее производная $f'(c)$, которая по теореме о связи односторонних производных с двусторонней должна равняться их общему значению:

$$f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c).$$

Поскольку $f'_-(c) \geq 0$ и $f'_+(c) \leq 0$, данное двойное равенство выполняется, только если

$$f'_-(c) = 0,\ f'_+(c) = 0, \text{ а значит, и } f'(c) = 0.\ \blacksquare.$$

2 Теоремы о средних значениях

*Теорема (теорема Ролля)**

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) она непрерывна на отрезке $[a, b]$,

2) она дифференцируема на интервале (a, b),

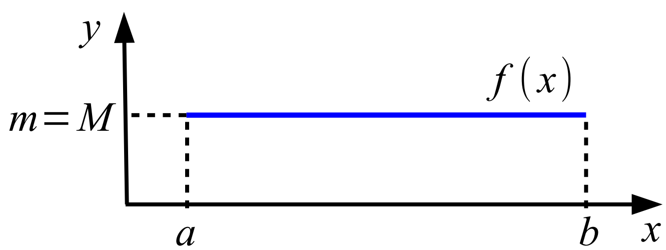
3) $f(a) = f(b)$.

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство

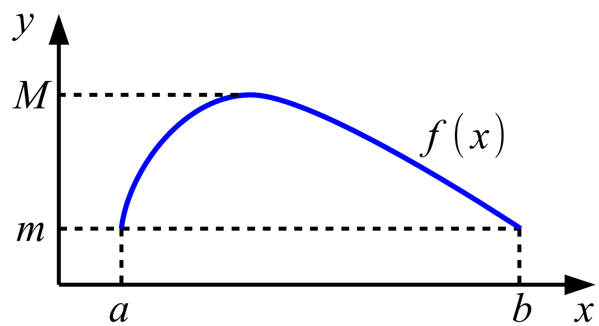
Поскольку $f(x) \in C[a, b]$, то она достигает на $[a, b]$ своего наибольшего M и наименьшего m значений по теореме Вейерштрасса для функции, непрерывной на отрезке. Возможны случаи:

1) $m = M$



Тогда $f(x) = const \Rightarrow \forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$

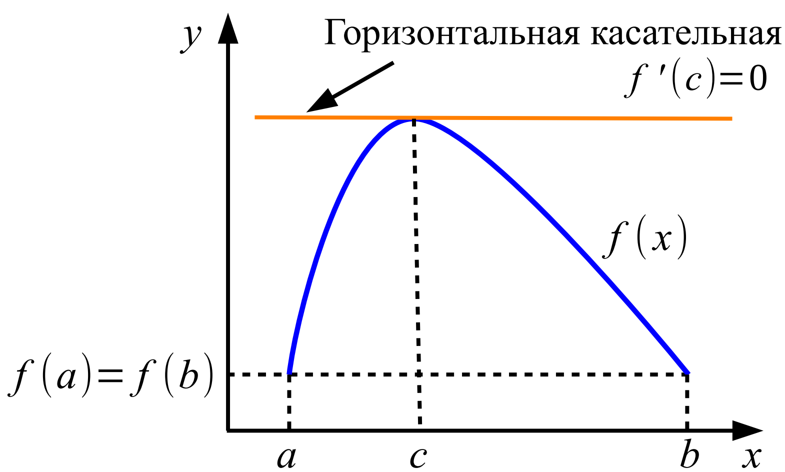
2) $m \neq M$



Так как $f(a) = f(b)$, то m или M достигаются на интервале (a, b). Пусть M достигается на (a, b), т.е. $M = f(c), c \in (a, b)$. Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$. ■

Геометрическая интерпретация теоремы

Если функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, то на интервале (a, b) существует точка, в которой эта функция имеет горизонтальную касательную.



*Теорема (теорема Лагранжа, теорема о конечных приращениях)**

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:
1) она непрерывна на отрезке $[a,b]$,
2) она дифференцируема на интервале (a,b).
Тогда

$$\exists c \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию
$F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.
$\Rightarrow \exists c \in (a,b) : F'(c) = 0$.
$F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,
$F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.
$\Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Теорема (теорема Коши)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:
1) они непрерывны на отрезке $[a,b]$,
2) они дифференцируемы на интервале (a,b),
3) $g'(x) \neq 0$ во всех точках интервала (a,b).
Тогда

$$\exists c \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3 Правило Лопиталя

Правило Лопиталя - это способ нахождения пределов функций через их производные.

Сначала рассмотрим частный случай правила Лопиталя раскрытия неопределенности (0/0).

*Теорема (частный случай правила Лопиталя)**

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

1) они непрерывны и дифференцируемы на интервале (a, b),

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$,

3) $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$,

4) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a, положив

$$f(a) = g(a) = 0.$$

В этом случае функции $f(x)$ и $g(x)$ становятся непрерывными в точке a и начинают удовлетворять всем условиям теоремы Коши на любом отрезке $[a, x]$, где $a < x < b$. Тогда

$$\exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

или, убрав промежуточные выкладки,

$$\exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (1)$$

Заметим, что здесь мы пишем не c, а $c(x)$, поскольку значение c зависит от рассматриваемого интервала (a, x). Меняя значение переменной x, мы меняем размер интервала (a, x). В результате меняется и значение c. Поэтому c является некоторой функций от x: $c = c(x)$.

Так как $a < c(x) < x$, то $\lim\limits_{x\to a+0} c(x) = a$.

По теореме о замене переменной в пределе имеем:

$$\lim_{c\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))},$$

а по равенству (1)

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

или, изменив обозначение переменной в последнем пределе с c на x,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \blacksquare$$

Общий случай правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

где a - это конечное число или одна из бесконечностей.

4 Порядок роста функций

Определение

Говорят, что бесконечно большая при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет **более высокий порядок роста**, чем бесконечно большая при $x \to a$ функция $g(x)$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\ln x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^n)'}{(\ln x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{1/x} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} nx^n = +\infty$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x)'}{(x^n)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x\ln a)'}{(nx^{n-1})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^n a}{n!}=+\infty,\ a>1$$

Показательная функция растет быстрее степенной, а степенная функция растет быстрее логарифмической.