# Математический анализ
# Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
# **Лекция 3.1**

**Аннотация**

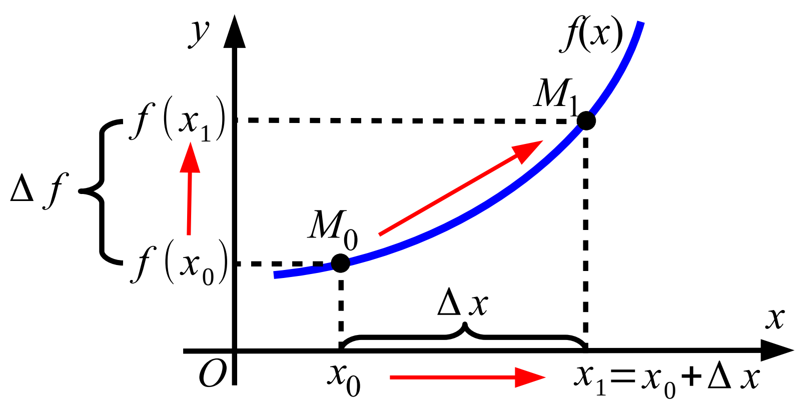
Производная функции, ее геометрический смысл. Односторонние производные, их связь с двусторонней производной. Дифференцируемость функции. Свойства дифференцируемых функций. Дифференциал функции, его геометрический смысл.

## 1 Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку $x_0$. В окрестности точки $x_0$ выберем произвольную точку $x_1$. Тогда

$\Delta x = x_1 - x_0$ – приращение значения аргумента $x$ в точке $x_0$ при переходе к точке $x_1$,

$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение значения функции $f(x)$ в точке $x_0$ при переходе к точке $x_1$.



*Определение*

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$. **Производной** функции $f(x)$ в точке $x_0$ называется
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$
Обозначение: $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Если
$$f'(x_0)=\infty, +\infty, -\infty,$$
то говорят, что в точке $x_0$ существует **бесконечная производная**, в противном случае – **конечная производная**.

*Замечание*

Поскольку мы работаем в основном с конечными производными, то в дальнейшем для краткости под словом "производная"мы будем понимать именно конечную производную. Случай бесконечной производной будет всегда оговариваться особо.

*Определение*

**Правосторонней производной** функции $f(x)$ в точке $x_0$ называется
$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$
Обозначение: $f'_+(x_0)$.

*Определение*

**Левосторонней производной** функции $f(x)$ в точке $x_0$ называется
$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$
Обозначение: $f'_-(x_0)$.

*Определение*

Правосторонняя и левосторонняя производные называются **односторонними производными**.

*Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)*

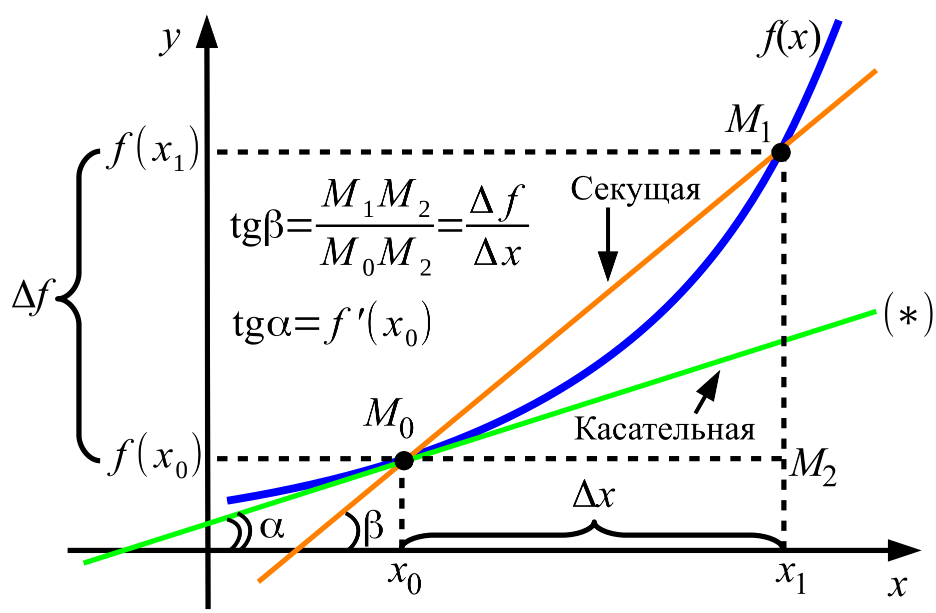
$$\exists f'(x_0) = A \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0) = A, f'_-(x_0) = A.$$

*Определение*

Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**.

# 2 Геометрический смысл производной

Пусть $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и имеет в ней конечную производную. Через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, проведем секущую $M_0M_1$ графика функции $y = f(x)$ (см. рисунок ниже). Устремив точку $M_1$ вдоль графика функции к точке $M_0$, мы переведем секущую $M_0M_1$ в прямую $(*)$, которая в окрестности точки $x_0$ будет иметь с графиком функции $f(x)$ только одну общую точку.



*Определение*

Предельное положение секущей $M_0M_1$, когда $M_1 \to M_0$, называется **наклонной касательной** к графику функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Коэффициенты уравнения $y = kx + b$ секущей $M_0M_1$ находим из условий

$$M_0 : y_0 = kx_0 + b \text{ и } M_1 : y_1 = kx_1 + b.$$

Откуда получаем

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

где $\Delta f = y_1 - y_0$, $\Delta x = x_1 - x_0$.

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \to x_0$ или $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. $x$, $x_0$, $y_0$ не зависят от $x_1$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left( \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right)(x - x_0) + y_0.$$

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Обозначив

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = y_{\text{кас}},$$

получаем **уравнение касательной**

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Из этого уравнения следует **геометрический смысл** конечной производной:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где $\alpha$ - угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x_0$ .

# 3 Дифференцируемость функции

*Определение*

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке $x_0$, если ее приращение $\Delta f$ в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где $A$ - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$.

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0).$$

*Доказательство*

*1. Прямая теорема.* $(\Rightarrow)$

Дано: $f(x) \in D(x_0)$.

Доказать: $\exists f'(x_0)$.

$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \dfrac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A \Rightarrow \exists f'(x_0) = A.$

*2. Обратная теорема.* $(\Leftarrow)$

Дано: $\exists f'(x_0)$.

Доказать: $f(x) \in D(x_0)$.

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Отсюда

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Т.к.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

то

$$\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) \in D(x_0). \ \blacksquare$$

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$

*Доказательство*

$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in C(x_0).$ $\blacksquare$

# 4 Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда $\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$.

*Определение*

Линейная по переменной $\Delta x$ функция $A \cdot \Delta x$ называется **дифференциалом (первым дифференциалом, дифференциалом первого порядка)** функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Обозначение: $df(x_0)$

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь, приращение независимой переменной $\Delta x$ часто обозначают как $dx$. Тогда

$$df(x_0) = A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot dx$$

и

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$$

*Пример:*

$f(x) = x^3, x_0 = 1,$
$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3 \Rightarrow df(1) = f'(1)dx = 3dx.$

*Геометрический смысл дифференциала*

Если $\Delta f$ - это приращение значения функции $f(x)$ в точке $x_0$ при изменении значения аргумента $x$ на $\Delta x$, то $df(x_0)$ - это приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x_0$ при изменении значения аргумента $x$ на $\Delta x$ (см. рисунок).