Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

Лекция 2.4

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Непрерывность функции

Непрерывность функции

Определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности конечной точки a, называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Эквивалентное определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности конечной точки a, называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Замечание

Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Замечание

Непрерывность функции предполагает, что эта функция определена в некоторой окрестности точки a, включая саму точку a.

Непрерывность функции

Геометрическая интерпретация

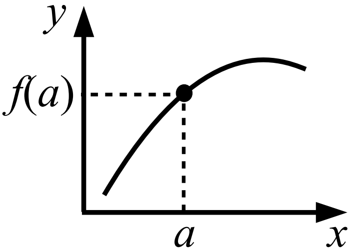
Непрерывность функции

Геометрическая интерпретация

Графически непрерывность функции в конечной точке a означает, что ее график в окрестности точки a представляет собой сплошную линию, которая не претерпевает каких-либо разрывов при переходе через саму точку a.

Геометрическая интерпретация

Графически непрерывность функции в конечной точке a означает, что ее график в окрестности точки a представляет собой сплошную линию, которая не претерпевает каких-либо разрывов при переходе через саму точку a.



$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности.

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности. Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

Непрерывность функции

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности. Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

1) необходимо и достаточно,

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности.
Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как
1) необходимо и достаточно,
2) тогда и только тогда, когда.

Например,

Непрерывность функции

Например, выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как

Например, выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как
1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B.

Например, выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как
1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B.
2. Для справедливости утверждения A необходима и достаточна справедливость утверждения B.

Непрерывность функции

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что утверждения A и B справедливы или нет одновременно:

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что утверждения A и B справедливы или нет одновременно:
а) если справедливо A, то должно быть справедливо B,

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что утверждения A и B справедливы или нет одновременно:

а) если справедливо A, то должно быть справедливо B,

б) если справедливо B, то должно быть справедливо A.

Непрерывность функции

Введем обозначения:

Непрерывность функции

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$

Непрерывность функции

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ - приращение значения аргумента x в точке a,

Непрерывность функции

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ - приращение значения аргумента x в точке a,

$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$

Непрерывность функции

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ - приращение значения аргумента x в точке a,

$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ - приращение значения функции $f(x)$ в точке a.

*Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке)**

*Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке)**

$$f(x) \in C(a) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Расшифровка математической записи:

Расшифровка математической записи:
$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

$\Leftrightarrow$ - необходимо и достаточно, чтобы

Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

$\Leftrightarrow$ - необходимо и достаточно, чтобы

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ - предел приращения значения функции в точке a равнялся нулю при стремлении к нулю приращения аргумента.

Непрерывность функции

Доказательство

Доказательство

1. Необходимость.

Непрерывность функции

Доказательство

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \in C(a)$

Доказательство

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \in C(a)$

Доказать: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$

$$\Downarrow$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$
$$\Downarrow$$
$$x = a + \Delta x$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$

$$\Downarrow$$

$$x = a + \Delta x$$

$$\Downarrow$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$

$$\Downarrow$$

$$x = a + \Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) - f(a)$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$

$$\Downarrow$$

$$x = a + \Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

$$f(x) \in C(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$
$$\Downarrow$$
$$x = a + \Delta x$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta f.$$

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \quad |\Delta f| < \varepsilon.$$

Непрерывность функции

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall\Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \quad |\Delta f| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$.

2. Достаточность.

2. Достаточность.

Дано: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

2. Достаточность.

Дано: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

Доказать: $f(x) \in C(a)$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\Downarrow$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$
$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \quad |\Delta f| < \varepsilon.$$

$\Delta x = x - a,$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta\colon \quad |\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \quad |\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$

$$\Downarrow$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall\Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow f(x) \in C(a). \blacksquare$$

Односторонняя непрерывность

Односторонняя непрерывность

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, c]$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева** в конечной точке c, если

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c).$$

Односторонняя непрерывность

Определение

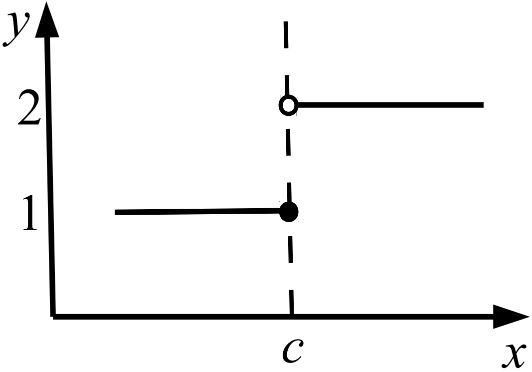
Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[c, b)$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа** в конечной точке c, если

$$\lim_{x \to c+0} f(x) = f(c).$$

Односторонняя непрерывность

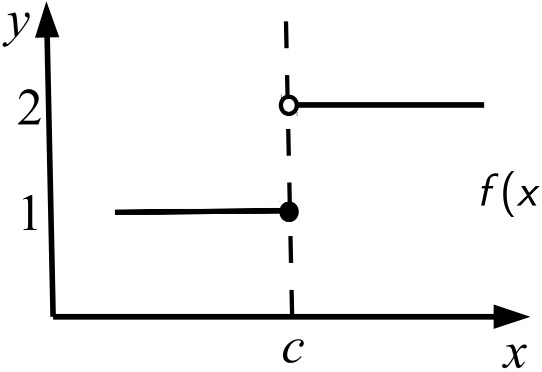
Пример функции, непрерывной слева:

Пример функции, непрерывной слева:



Односторонняя непрерывность

Пример функции, непрерывной слева:



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le c \\ 2, & x > c \end{cases}$$

Точки разрыва

Точки разрыва

Определение

Конечная точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке a или определена, но не является в ней непрерывной.

Классификация точек разрыва

Точки разрыва

Классификация точек разрыва

1. Если a - точка разрыва функции $f(x)$ и в этой точке существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \text{ и } \lim_{x\to a+0} f(x),$$

то точка a называется **точкой разрыва первого рода**.

Точки разрыва

Классификация точек разрыва

1.1. Если a - точка разрыва первого рода и

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x),$$

то a называется **точкой устранимого разрыва первого рода**.

Классификация точек разрыва

1.2. Если a - точка разрыва первого рода и

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x),$$

то a называется **точкой неустранимого разрыва первого рода**.

Классификация точек разрыва

2. Точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется **точкой разрыва второго рода**.

Точка разрыва

Точки разрыва

Точка разрыва

Точка разрыва
первого рода

Точки разрыва

Точка разрыва

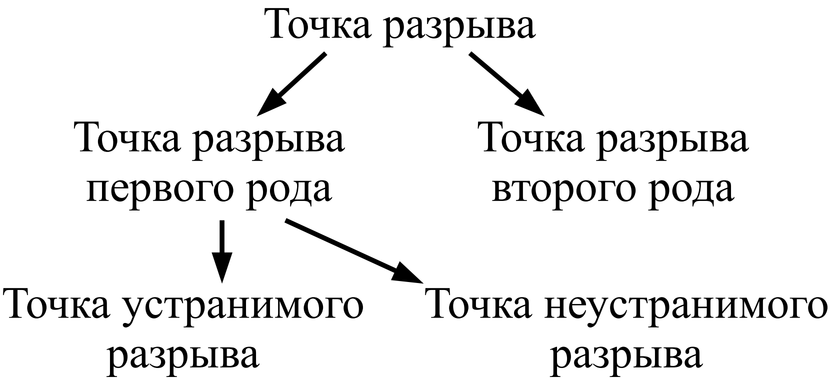
Точка разрыва первого рода

Точка разрыва второго рода

Точки разрыва

- Точка разрыва
  - Точка разрыва первого рода
    - Точка устранимого разрыва
  - Точка разрыва второго рода

Точки разрыва



Точки разрыва

Примеры:

Точки разрыва

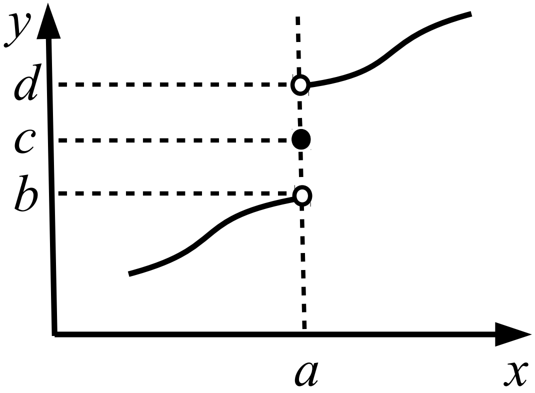
Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода

Точки разрыва

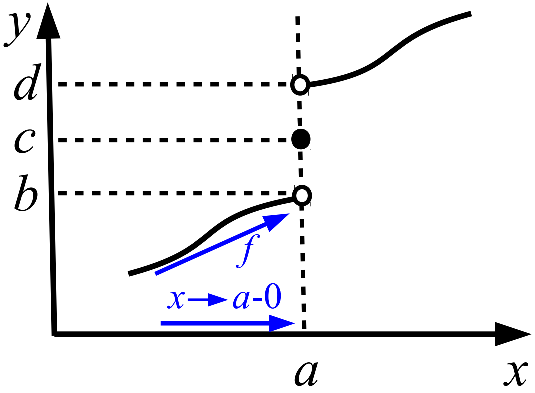
Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода



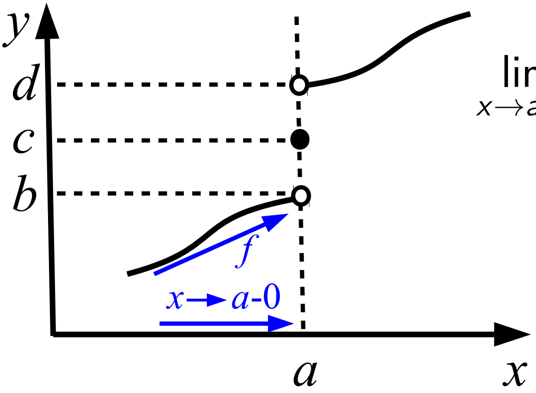
Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода



Примеры:

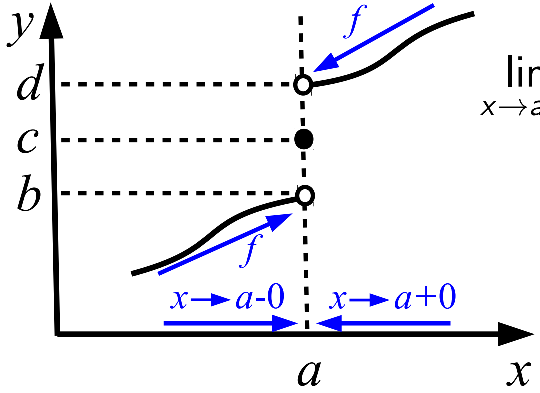
1) точка неустранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$

Примеры:

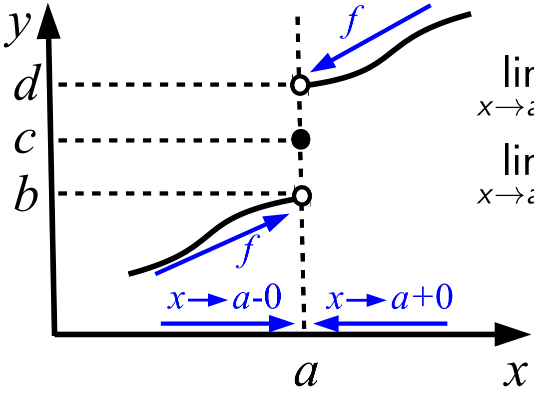
1) точка неустранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$

Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода

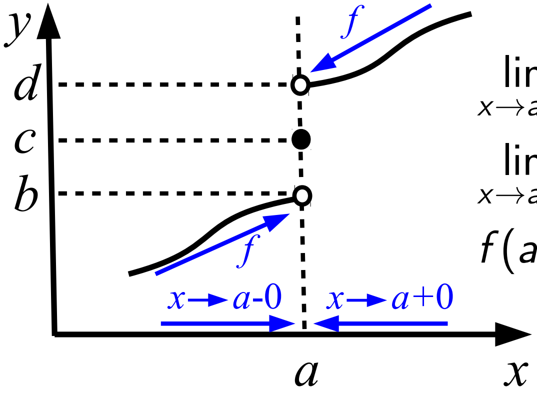


$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = d,$$

Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b,$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = d,$$

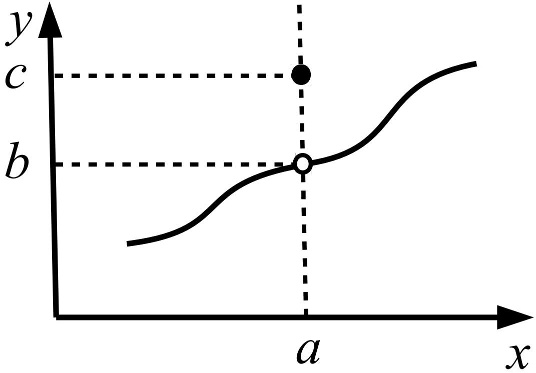
$$f(a) = c.$$

Примеры:

2) точка устранимого разрыва первого рода

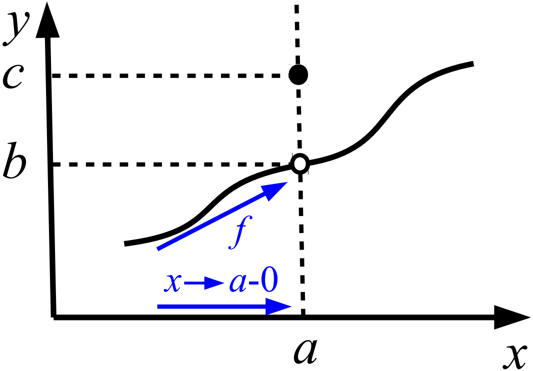
Примеры:

2) точка устранимого разрыва первого рода



Примеры:

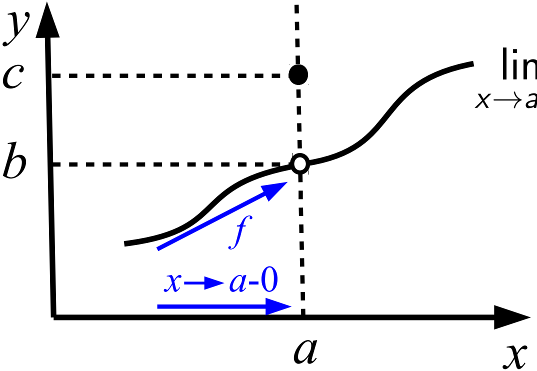
2) точка устранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

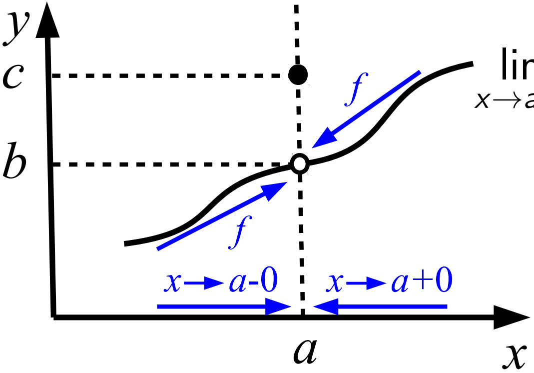
2) точка устранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b,$$

Примеры:

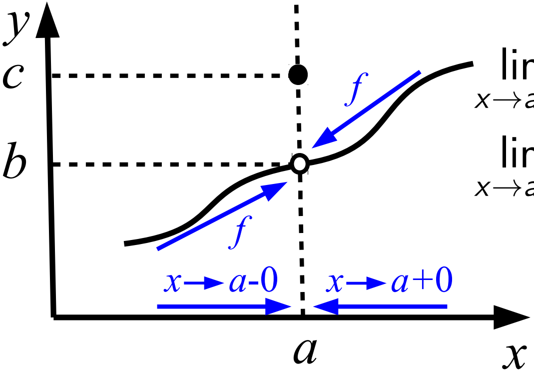
2) точка устранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b,$$

Примеры:

2) точка устранимого разрыва первого рода



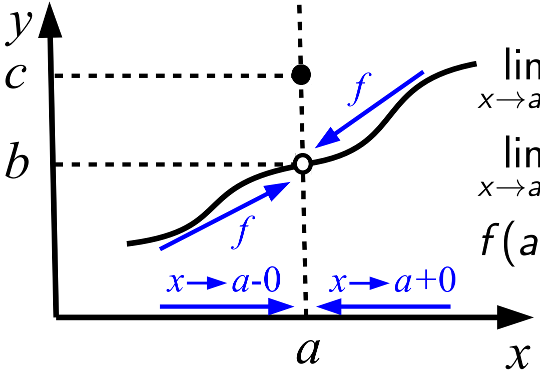
$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b,$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b,$$

Точки разрыва

Примеры:

2) точка устранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b,$$

$$f(a) = c.$$

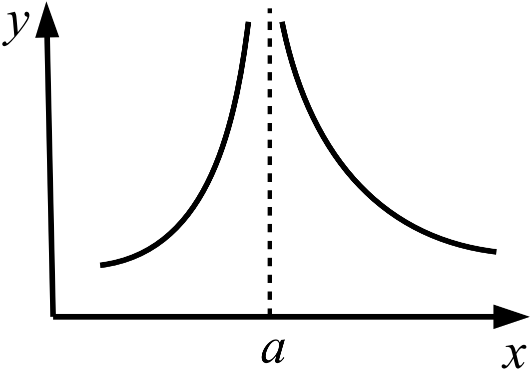
Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва второго рода

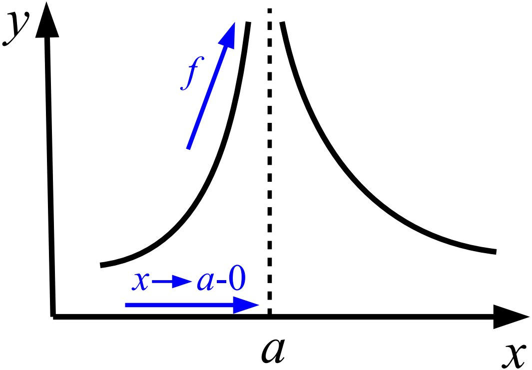
Примеры:

3) точка разрыва второго рода



Примеры:

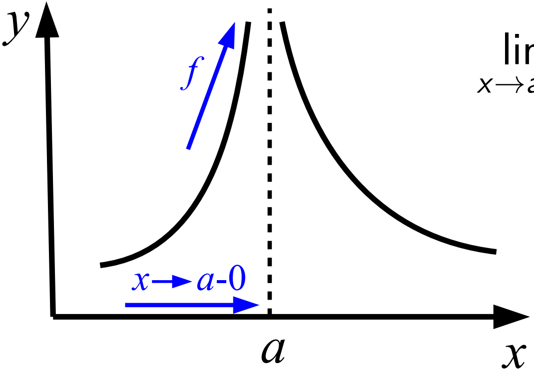
3) точка разрыва второго рода



Точки разрыва

Примеры:

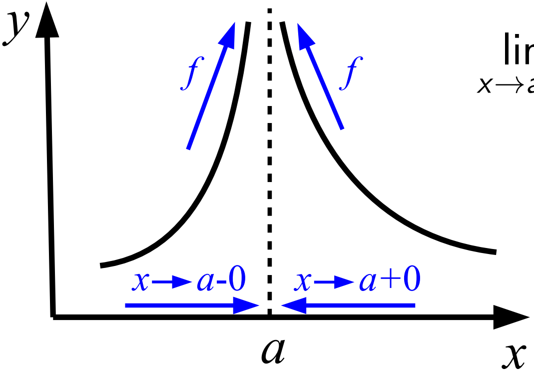
3) точка разрыва второго рода



$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty,$$

Примеры:

3) точка разрыва второго рода

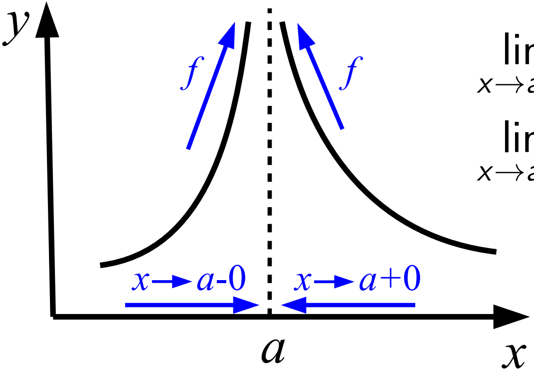


$$\lim_{x \to a-0} f(x) = +\infty,$$

Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва второго рода

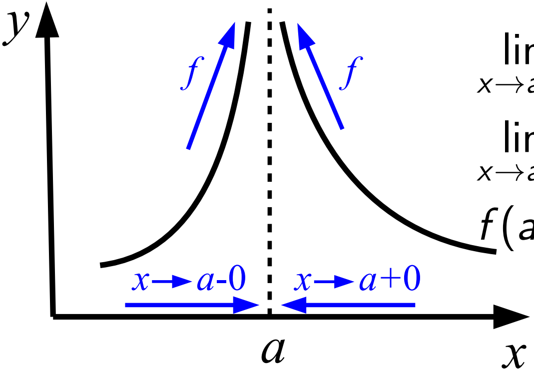


$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty,$$

Примеры:

3) точка разрыва второго рода



$$\lim_{x \to a-0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty,$$

$f(a)$ - неопределена.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f(x) + g(x) \in C(a)$,

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f(x) + g(x) \in C(a)$,

2) $f(x) \cdot g(x) \in C(a)$,

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f(x) + g(x) \in C(a)$,

2) $f(x) \cdot g(x) \in C(a)$,

3) $f(x)/g(x) \in C(a)$, если $g(a) \neq 0$.

Теорема (непрерывность сложной функции)

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (непрерывность сложной функции)
Если $f(x) \in C(a)$ и $g(y) \in C(b)$, где $b = f(a)$, то $g(f(x)) \in C(a)$.

*Теорема (непрерывность основных элементарных функций)**

*Теорема (непрерывность основных элементарных функций)**

Основные элементарные функции непрерывны всюду в их области определения.

Доказательство для $y = \sin x$

Доказательство для $y = \sin x$

Δf

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$

$$= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}$$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$
$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$
$$= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} =$$
$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) =$$

$= |$бесконечно малая $\cdot$ ограниченная $=$

бесконечно малая$|$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$
$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) =$$
$= \big|$бесконечно малая $\cdot$ ограниченная $=$ бесконечно малая$\big| = 0$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$
$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) =$$
$= \big|$бесконечно малая $\cdot$ ограниченная $=$ бесконечно малая$\big| = 0$

$\Rightarrow \sin x \in C(x).$ ■

Теорема (непрерывность элементарной функции)

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (непрерывность элементарной функции)

Любая элементарная функция непрерывна в любой точке области ее определения.