Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

Лекция 2.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Сравнение функций

Сравнение функций

Пусть $\overset{\circ}{U}(a)$ - некоторая проколотая окрестность точки a.

Сравнение функций

Пусть $\overset{\circ}{U}(a)$ - некоторая проколотая окрестность точки a.

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\overset{\circ}{U}(a)$, если $\exists c > 0\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$: $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$.

Сравнение функций

Пусть $\overset{\circ}{U}(a)$ - некоторая проколотая окрестность точки a.

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\overset{\circ}{U}(a)$, если $\exists c > 0 \; \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$: $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$.

Обозначение: $f(x) = O(g(x)), x \to a$.

Сравнение функций

Пусть $\overset{\circ}{U}(a)$ - некоторая проколотая окрестность точки a.

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\overset{\circ}{U}(a)$, если $\exists c > 0\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$: $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$.

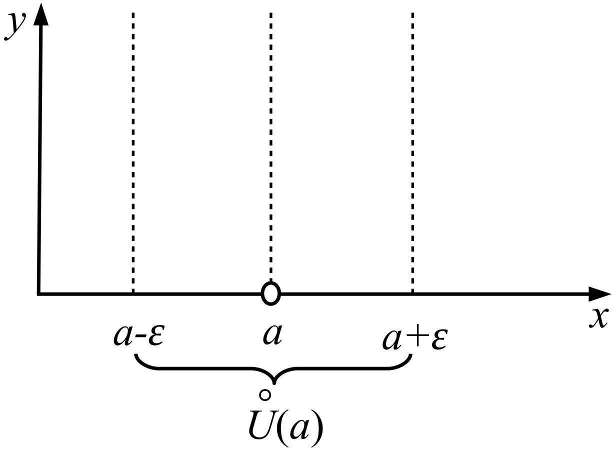
Обозначение: $f(x) = O(g(x)), x \to a$.

Произношение: f - это "O"-большое от g при $x \to a$.

Пример:

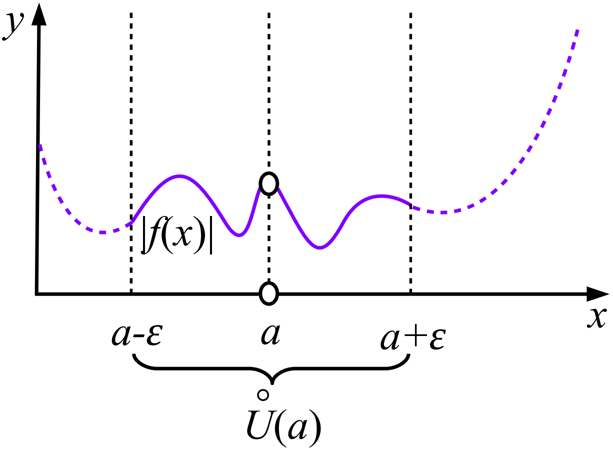
Сравнение функций

Пример:

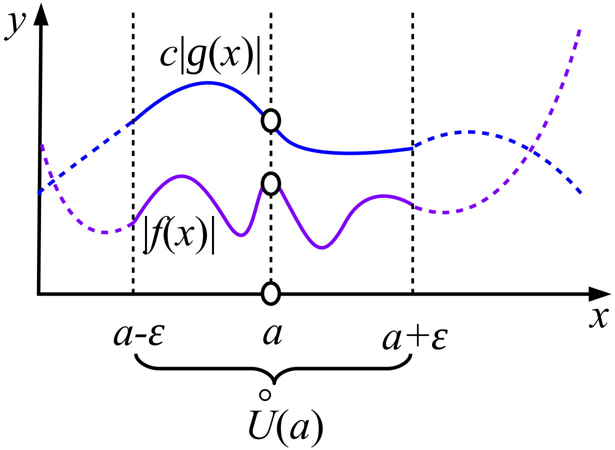


Сравнение функций

Пример:



Пример:



Определение

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$, то они называются **функциями одного порядка** при $x \to a$.

Определение

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$, то они называются **функциями одного порядка** при $x \to a$.

Обозначение: $f(x) \asymp g(x), x \to a$.

Сравнение функций

Определение
Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$ $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ называются **эквивалентными** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Определение

Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$ $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ называются **эквивалентными** при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Обозначение: $f(x) \sim g(x), x \to a$.

Свойства эквивалентных функций

Сравнение функций

Свойства эквивалентных функций

1) если $f(x) \sim g(x), x \to a$, то
$$g(x) \sim f(x), x \to a,$$

Свойства эквивалентных функций

1) если $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$g(x) \sim f(x), x \to a,$$

2) если $f(x) \sim g(x), g(x) \sim h(x), x \to a$, то

$$f(x) \sim h(x), x \to a.$$

Определение

Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)\ f(x) \neq 0$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Определение

Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)\ f(x) \neq 0$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Обозначение: $g(x) = \circ(f(x)), x \to a$.

Определение

Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$ $f(x) \neq 0$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Обозначение: $g(x) = o(f(x)), x \to a$.

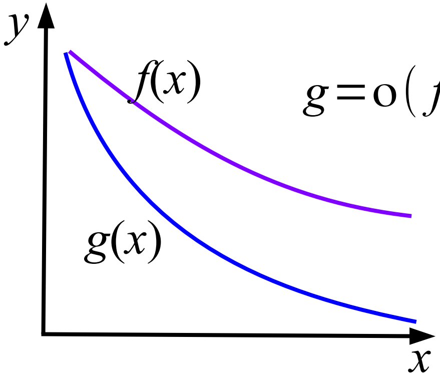
Произношение: g - это "о"-малое от f при $x \to a$.

Определение
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые функции при $x \to a$ и $g(x) = \circ(f(x)), x \to a$.
Тогда говорят, что $g(x)$ является **бесконечно малой более высокого порядка**, чем $f(x)$.

Сравнение функций

Пример:

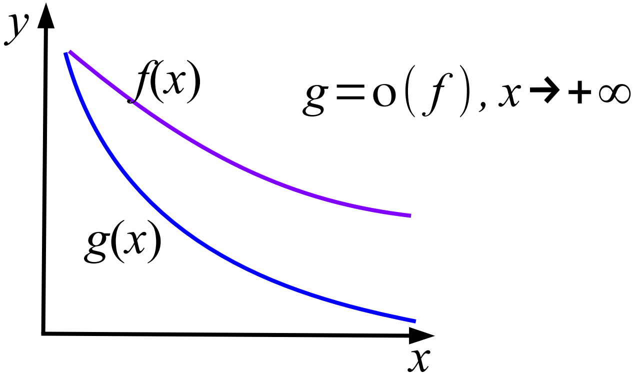
Пример:



$$g = o(f),\ x \to +\infty$$

Сравнение функций

Пример:



Здесь обе функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$, только функция $g(x)$ убывает быстрее, чем функция $f(x)$.

Определение

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые функции при $x \to a$ и $g(x) = \circ(f(x)), x \to a$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой порядка r относительно** функции $f(x)$, если существует не равный нулю конечный предел

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(f(x))^r}.$$

Свойства “о”-малое

Сравнение функций

Свойства "о"-малое

1) $\circ(f) + \circ(f) = \circ(f)$,

Сравнение функций

Свойства "о"-малое

1) $\circ(f) + \circ(f) = \circ(f)$,

2) $\circ(cf) = \circ(f), c \neq 0$,

Сравнение функций

Свойства “о”-малое

1) $\circ(f) + \circ(f) = \circ(f)$,

2) $\circ(cf) = \circ(f), c \neq 0$,

3) $c \cdot \circ(f) = \circ(f), c \neq 0$,

Свойства "о"-малое

1) $\circ(f) + \circ(f) = \circ(f)$,

2) $\circ(cf) = \circ(f), c \neq 0$,

3) $c \cdot \circ(f) = \circ(f), c \neq 0$,

4) $\circ(\circ(f)) = \circ(f)$.

*Теорема (о связи эквивалентности и "о"-малое)**

*Теорема (о связи эквивалентности и "o"-малое)**
Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), x \to a.$$

Сравнение функций

Замечание

Сравнение функций

Замечание

Фраза "необходимо и достаточно"в формулировке теоремы означает, что данная теорема определяет условие, которое одновременно является и необходимым, и достаточным.

Замечание
Фраза "необходимо и достаточно"в формулировке теоремы означает, что данная теорема определяет условие, которое одновременно является и необходимым, и достаточным. Чтобы доказать теорему, нужно доказать отдельно необходимость данного условия и отдельно его достаточность.

Введем обозначения:

Сравнение функций

Введем обозначения:

Утверждение A

Введем обозначения:

Утверждение A – "функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to a$".

Сравнение функций

Введем обозначения:

Утверждение A – "функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to a$".

Условие B

Введем обозначения:

Утверждение A – "функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to a$".

Условие B – "$f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$".

Сравнение функций

Введем обозначения:

Утверждение A – "функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to a$".

Условие B – "$f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$".

Тогда наша теорема перепишется в виде:

Введем обозначения:

Утверждение A – "функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to a$".

Условие B – "$f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$".

Тогда наша теорема перепишется в виде:

Для истинности *утверждения* A необходима и достаточна истинность *условия* B.

Необходимость *условия* B означает, что *утверждение* A не может быть истинным, если *условие* B ложно.

Сравнение функций

Необходимость *условия* B означает, что *утверждение* A не может быть истинным, если *условие* B ложно. Соответственно, если *утверждение* A истинно, то *условие* B также должно быть истинным.

Сравнение функций

Необходимость *условия* B означает, что *утверждение* A не может быть истинным, если *условие* B ложно. Соответственно, если *утверждение* A истинно, то *условие* B также должно быть истинным.

Достаточность *условия* B означает, что, если *условие* B истинно, то *утверждение* A также истинно.

Таким образом,

Сравнение функций

Таким образом, фраза "необходимо и достаточно"означает, что из истинности *утверждения* A следует истинность *условия* B

Таким образом, фраза "необходимо и достаточно"означает, что из истинности *утверждения* A следует истинность *условия* B (читаем исходную теорему слева направо), Таким образом, фраза "необходимо и достаточно"означает, что из истинности *утверждения* A следует истинность *условия* B (читаем исходную теорему слева направо), а из истинности *условия* B следует истинность *утверждения* A

Таким образом, фраза "необходимо и достаточно"означает, что из истинности *утверждения* A следует истинность *условия* B (читаем исходную теорему слева направо), а из истинности *условия* B следует истинность *утверждения* A (читаем теорему справа налево).

Доказательство теоремы

Доказательство теоремы

1. Необходимость.

Доказательство теоремы

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \sim g(x), x \to a$

Доказательство теоремы

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \sim g(x), x \to a$ (*утверждение* A).

Доказательство теоремы

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \sim g(x), x \to a$ (*утверждение* A).

Доказать: $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$

Сравнение функций

Доказательство теоремы

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \sim g(x), x \to a$ (*утверждение* A).

Доказать: $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$

(*условие* B).

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x \to a} \varphi(x)$$

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Далее,

$f(x) - g(x)$

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Далее,

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x)$$

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Далее,

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) = (\varphi(x) - 1)g(x).$$

Откуда,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}$$

Откуда,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(\varphi(x)-1)g(x)}{g(x)}$$

Откуда,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(\varphi(x)-1)g(x)}{g(x)}=$$

$$=\lim_{x\to a}(\varphi(x)-1)$$

Откуда,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(\varphi(x)-1)g(x)}{g(x)}=$$

$$=\lim_{x\to a}(\varphi(x)-1)=1-1=0.$$

Откуда,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(\varphi(x)-1)g(x)}{g(x)}=$$

$$=\lim_{x\to a}(\varphi(x)-1)=1-1=0.$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)-g(x)=\circ(g(x)),\, x\to a$$

Сравнение функций

Откуда,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(\varphi(x)-1)g(x)}{g(x)}=$$

$$=\lim_{x\to a}(\varphi(x)-1)=1-1=0.$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)-g(x)=\circ(g(x)),\, x\to a$$

и

$$f(x)=g(x)+\circ(g(x)),\, x\to a.$$

Сравнение функций

2. Достаточность.

2. Достаточность.

Дано: $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$

2. Достаточность.

Дано: $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$

(*условие B*).

2. Достаточность.

Дано: $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$

(*условие B*).

Доказать: $f(x) \sim g(x), x \to a$

2. Достаточность.

Дано: $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$

(*условие* B).

Доказать: $f(x) \sim g(x), x \to a$

(*утверждение* A).

Сравнение функций

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)+\circ(g(x))}{g(x)}$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)+\circ(g(x))}{g(x)} =$$
$$= \lim_{x\to a}(1+\frac{\circ(g(x))}{g(x)})$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)+\circ(g(x))}{g(x)} =$$
$$= \lim_{x\to a}(1+\frac{\circ(g(x))}{g(x)}) = 1 + \lim_{x\to a}\frac{\circ(g(x))}{g(x)}$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)+\circ(g(x))}{g(x)} =$$
$$= \lim_{x\to a}(1+\frac{\circ(g(x))}{g(x)}) = 1 + \lim_{x\to a}\frac{\circ(g(x))}{g(x)} =$$
$$= 1 + 0 = 1.$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)+\circ(g(x))}{g(x)} =$$
$$= \lim_{x\to a}(1+\frac{\circ(g(x))}{g(x)}) = 1 + \lim_{x\to a}\frac{\circ(g(x))}{g(x)} =$$
$$= 1 + 0 = 1.$$
$$\Rightarrow f(x) \sim g(x), x \to a. \blacksquare$$

Определение

Если функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a,$$

то функция $g(x)$ называется **главной частью** функции $f(x)$.

*Теорема (о пределах эквивалентных функций)**

*Теорема (о пределах эквивалентных функций)**

Пусть $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to a$. Тогда если существует $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)/g_1(x)$, то существует и $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$, причем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Сравнение функций

Доказательство

Сравнение функций

Доказательство

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}$$

Сравнение функций

Доказательство

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}=\lim_{x\to a}\frac{f\cdot f_1\cdot g_1}{f_1\cdot g_1\cdot g}$$

Доказательство

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}=\lim_{x\to a}\frac{f\cdot f_1\cdot g_1}{f_1\cdot g_1\cdot g}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f}{f_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f_1}{g_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g_1}{g}$$

Сравнение функций

Доказательство

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}=\lim_{x\to a}\frac{f\cdot f_1\cdot g_1}{f_1\cdot g_1\cdot g}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f}{f_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f_1}{g_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g_1}{g}=\lim_{x\to a}\frac{f_1}{g_1}.\ \blacksquare$$

Для применения этой теоремы необходимо знать таблицу эквивалентных функций.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

1) $\sin x \sim x, x \to 0$

2) $\operatorname{tg} x \sim x, x \to 0$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

1) $\sin x \sim x, x \to 0$

2) $\operatorname{tg} x \sim x, x \to 0$

3) $\arcsin x \sim x, x \to 0$

4) $\operatorname{arctg} x \sim x, x \to 0$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

1) $\sin x \sim x, x \to 0$

2) $\operatorname{tg} x \sim x, x \to 0$

3) $\arcsin x \sim x, x \to 0$

4) $\operatorname{arctg} x \sim x, x \to 0$

5) $1 - \cos x \sim x^2/2, x \to 0$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

6) $\ln(1+x) \sim x, x \to 0$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

6) $\ln(1+x) \sim x, x \to 0$

7) $a^x - 1 \sim x \ln a, x \to 0$

8) $e^x - 1 \sim x, x \to 0$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

6) $\ln(1 + x) \sim x, x \to 0$

7) $a^x - 1 \sim x \ln a, x \to 0$

8) $e^x - 1 \sim x, x \to 0$

9) $(1 + x)^m - 1 \sim mx, x \to 0$

Сравнение функций

Используя теорему о замене переменной можно показать, что в данной таблице отношение эквивалентности сохранится, если переменную x заменить на какую-либо функцию u при условии, что $u \to 0$.

Сравнение функций

Примеры:

Примеры:

1) $\sin u \sim u,\ u \to 0$

2) $\operatorname{tg} u \sim u,\ u \to 0$

3) $e^u - 1 \sim u,\ u \to 0$

Сравнение функций

Примеры:

1) $\sin u \sim u, u \to 0$

2) $\operatorname{tg} u \sim u, u \to 0$

3) $e^u - 1 \sim u, u \to 0$

Здесь $u = u(x)$ - некоторая функция, которая должна стремиться к нулю: $u \to 0$.