Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

Лекция 2.2

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Общие свойства пределов

*Теорема (локальная ограниченность функции)**

Общие свойства пределов

*Теорема (локальная ограниченность функции)**
Если функция $f(x)$ имеет в точке a конечный предел, то существует такая проколотая окрестность точки a, в которой функция $f(x)$ ограничена.

Общие свойства пределов

Доказательство

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда по определению предела в терминах окрестностей

Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда по определению предела в терминах окрестностей

$$\forall U(b, \varepsilon)\ \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta):\ f(x) \in U(b, \varepsilon).$$

Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда по определению предела в терминах окрестностей

$\forall U(b,\varepsilon)\ \exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$: $f(x) \in U(b,\varepsilon)$.

Поскольку b - конечное число, то

$$U(b,\varepsilon) = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда по определению предела в терминах окрестностей

$\forall U(b,\varepsilon)\ \exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$: $f(x) \in U(b,\varepsilon)$.

Поскольку b - конечное число, то

$$U(b,\varepsilon) = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

и

$$f(x) \in U(b,\varepsilon) \Leftrightarrow f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon),$$

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда по определению предела в терминах окрестностей

$\forall U(b,\varepsilon)\ \exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$: $f(x) \in U(b,\varepsilon)$.

Поскольку b - конечное число, то

$$U(b,\varepsilon) = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

и

$$f(x) \in U(b,\varepsilon) \Leftrightarrow f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon),$$
$$\forall U(b,\varepsilon) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0.$$

Общие свойства пределов

Соответственно, рассмотренное выше определение предела можно переписать в виде:

Общие свойства пределов

Соответственно, рассмотренное выше определение предела можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \overset{\circ}{U}(a,\delta) \; \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta): \quad f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Соответственно, рассмотренное выше определение предела можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathring{U}(a, \delta) \ \forall x \in \mathring{U}(a, \delta): \quad f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = 1$.

Общие свойства пределов

Соответственно, рассмотренное выше определение предела можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathring{U}(a,\delta)\ \forall x \in \mathring{U}(a,\delta): \quad f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\exists \mathring{U}(a,\delta_1)\ \forall x \in \mathring{U}(a,\delta_1):\ f(x) \in (b-1, b+1),$$

Общие свойства пределов

Соответственно, рассмотренное выше определение предела можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): \quad f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta_1) \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_1): \ f(x) \in (b - 1, b + 1),$$

где δ_1 - значение δ, соответствующее выбранному значению $\varepsilon = 1$.

Общие свойства пределов

Мы получили, что у точки a имеется проколотая окрестность, в которой значения функции $f(x)$ заключены между числами $b-1$ (нижняя граница) и $b+1$ (верхняя граница).

Мы получили, что у точки a имеется проколотая окрестность, в которой значения функции $f(x)$ заключены между числами $b-1$ (нижняя граница) и $b+1$ (верхняя граница). Это означает ограниченность функции в некоторой проколотой окрестности точки a. $\blacksquare$

*Теорема (локальная знакоопределенность функции)**

*Теорема (локальная знакоопределенность функции)**

Если в точке a функция $f(x)$ имеет не равный нулю конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности точки a функция имеет тот же знак, что и сам предел.

Доказательство

Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Ранее было показано, что для конечного числа b определение предела можно записать в виде

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\overset{\circ}{U}(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta):\quad f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Ранее было показано, что для конечного числа b определение предела можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \; \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): \quad f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = b$.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Ранее было показано, что для конечного числа b определение предела можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta):\quad f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = b$. Тогда

$$\exists \overset{\circ}{U}(a,\delta_b)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta_b):\ f(x) \in (0, 2b),$$

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Ранее было показано, что для конечного числа b определение предела можно записать в виде

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\overset{\circ}{U}(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)\colon$$
$$f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = b$. Тогда

$$\exists\overset{\circ}{U}(a,\delta_b)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta_b)\colon\ f(x) \in (0, 2b),$$

где δ_b - значение δ, соответствующее выбранному значению $\varepsilon = b$.

Мы получили, что в некоторой проколотой окрестности точки a функция $f(x)$ положительна, т.е. ее знак совпадает со знаком числа b.

Мы получили, что в некоторой проколотой окрестности точки a функция $f(x)$ положительна, т.е. ее знак совпадает со знаком числа b.

Случай $b < 0$ доказывается аналогично. $\blacksquare$

Теорема (1-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)

Общие свойства пределов

Теорема (1-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)

Если $f(x) \geq A$ в некоторой проколотой окрестности точки a и имеет в этой точке конечный или бесконечный определенного знака предел, то

$$\lim_{x \to a} f(x) \geq A.$$

Общие свойства пределов

Теорема (2-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)

Теорема (2-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)

Если $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = A,$$

где A - конечное число или бесконечность определенного знака, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Теорема (единственность предела)

Теорема (единственность предела)
Если функция $f(x)$ имеет в точке a конечный предел, то этот предел единственный.

Общие свойства пределов

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Общие свойства пределов

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Пусть существуют конечные или бесконечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y \to b} g(y)$,

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Пусть существуют конечные или бесконечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y \to b} g(y)$, и пусть в некоторой проколотой окрестности точки a имеет место $f(x) \neq b$.

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Пусть существуют конечные или бесконечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y\to b} g(y)$, и пусть в некоторой проколотой окрестности точки a имеет место $f(x) \neq b$. Тогда в точке a существует предел сложной функции $g(f(x))$

Общие свойства пределов

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Пусть существуют конечные или бесконечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y\to b} g(y)$, и пусть в некоторой проколотой окрестности точки a имеет место $f(x) \neq b$. Тогда в точке a существует предел сложной функции $g(f(x))$ и $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to b} g(y)$.

Замечательные пределы

Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

Здесь u - произвольная функция, которая обладает свойством: $u \to 0$.

Примеры:

Примеры:

1) $u = 5x \to 0$ при $x \to 0$

Примеры:

1) $u = 5x \to 0$ при $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$

Примеры:

1) $u = 5x \to 0$ при $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$

2) $u = 2x - 2 \to -2$ при $x \to 0$

Примеры:

1) $u = 5x \to 0$ при $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$

2) $u = 2x - 2 \to -2$ при $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x-2)}{2x-2} \neq 1.$$

Следствия:

Следствия:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{tg} u}{u}=1$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\arcsin u}{u}=1$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{arctg} u}{u}=1$$

Второй замечательный предел:

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e \qquad \lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e \qquad \lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$$

Здесь u - произвольная функция, которая обладает свойством: $u\to 0$.

Примеры:

Примеры:

1) $u = 3x \to 0$ при $x \to 0$

Примеры:

1) $u = 3x \to 0$ при $x \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} (1 + 3x)^{1/3x} = e$,

Примеры:

1) $u = 3x \to 0$ при $x \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/3x} = e$,

2) $u = 4x - 1 \to -1$ при $x \to 0$

Примеры:

1) $u = 3x \to 0$ при $x \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/3x} = e$,

2) $u = 4x - 1 \to -1$ при $x \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+(4x-1))^{1/(4x-1)} \neq e$.

Следствия:

Следствия:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ $\qquad$ $\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=e$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ $\qquad$ $\lim\limits_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u}=\ln a$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$

Бесконечно малые функции

Бесконечно малые функции

Определение

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

*Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)**

Бесконечно малые функции

*Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)**

Конечный предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует и равен b тогда и только тогда, когда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Бесконечно малые функции

Замечание

Замечание

Фраза "тогда и только тогда, когда"в формулировке теоремы означает, что данная теорема является составной и состоит из двух простых теорем - прямой и обратной.

Прямая теорема читается слева направо:

Прямая теорема читается слева направо:
Если конечный предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует и равен b, то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Бесконечно малые функции

Обратная теорема читается справа налево:

Обратная теорема читается справа налево:
Если $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$, то конечный предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует и равен b.

Бесконечно малые функции

Чтобы доказать исходную составную теорему, нужно доказать каждую из составляющих ее простых теорем.

Доказательство теоремы

Доказательство теоремы

1. Прямая теорема.

Доказательство теоремы

1. Прямая теорема.

Дано: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, b - конечное число.

Доказательство теоремы

1. Прямая теорема.

Дано: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, b - конечное число.

Доказать: $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Бесконечно малые функции

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Бесконечно малые функции

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

Бесконечно малые функции

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$\lim\limits_{x \to a} \alpha(x)$

Бесконечно малые функции

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - b)$$

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = \lim_{x \to a}(f(x) - b) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} b$$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.
Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - b) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} b = b - b$$

Бесконечно малые функции

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - b) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} b =$$
$$= b - b = 0.$$

Бесконечно малые функции

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = \lim_{x \to a}(f(x) - b) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} b =$$
$$= b - b = 0.$$

Получаем, что $\alpha(x)$ - это бесконечно малая при $x \to a$.

Бесконечно малые функции

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = \lim_{x \to a}(f(x) - b) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} b = \\ = b - b = 0.$$

Получаем, что $\alpha(x)$ - это бесконечно малая при $x \to a$.

Т.к. $\alpha(x) = f(x) - b$,

Бесконечно малые функции

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x\to a}\alpha(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - b) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} b = \\ = b - b = 0.$$

Получаем, что $\alpha(x)$ - это бесконечно малая при $x \to a$.

Т.к. $\alpha(x) = f(x) - b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$.

2. Обратная теорема.

2. Обратная теорема.

Дано: $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

2. Обратная теорема.

Дано: $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Доказать: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, b - конечное число.

Бесконечно малые функции

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Бесконечно малые функции

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

Бесконечно малые функции

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a}(b + \alpha(x))$

Бесконечно малые функции

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (b + \alpha(x)) =$
$= \lim\limits_{x \to a} b + \lim\limits_{x \to a} \alpha(x)$

Бесконечно малые функции

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}(b + \alpha(x)) =$
$= \lim\limits_{x\to a} b + \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = b + 0$

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a}(b + \alpha(x)) =$

$= \lim\limits_{x \to a} b + \lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = b + 0 = b$. ■

*Свойства бесконечно малых функций**

Бесконечно малые функции

*Свойства бесконечно малых функций**

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$, а $\gamma(x)$ - ограниченная функция. Тогда

*Свойства бесконечно малых функций**

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$, а $\gamma(x)$ - ограниченная функция. Тогда

1) $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$

Бесконечно малые функции

*Свойства бесконечно малых функций**

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$, а $\gamma(x)$ - ограниченная функция. Тогда

1) $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$

2) $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$

Бесконечно малые функции

*Свойства бесконечно малых функций**

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$, а $\gamma(x)$ - ограниченная функция. Тогда

1) $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$

2) $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$

3) $\alpha(x) \cdot \gamma(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$

Бесконечно малые функции

Доказательство свойства 1

Доказательство свойства 1

$$\lim_{x \to a} (\alpha(x) + \beta(x))$$

Доказательство свойства 1

$$\lim_{x \to a}(\alpha(x) + \beta(x)) = \lim_{x \to a} \alpha(x) + \lim_{x \to a} \beta(x)$$

Доказательство свойства 1

$$\lim_{x\to a}(\alpha(x)+\beta(x)) = \lim_{x\to a}\alpha(x) + \lim_{x\to a}\beta(x) =$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

Бесконечно малые функции

Доказательство свойства 1

$$\lim_{x\to a}(\alpha(x)+\beta(x)) = \lim_{x\to a}\alpha(x) + \lim_{x\to a}\beta(x) =$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

$\Rightarrow \alpha(x)+\beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

$\blacksquare$

Бесконечно большие функции

Бесконечно большие функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Бесконечно большие функции

Теорема (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций)

Бесконечно большие функции

Теорема (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций)

Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to a$, то функция $1/f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.