Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

Лекция 2.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Окрестность точки

Окрестность точки

Здесь и далее под **точкой** будем понимать как конечное, так и бесконечное число.

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a,\varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

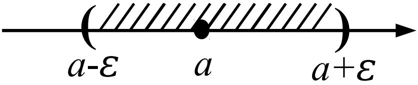
$U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$

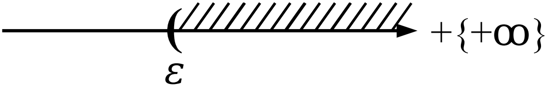
$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$

$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$

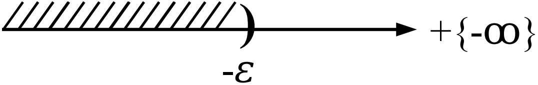
Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

$$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$$



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$

Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$

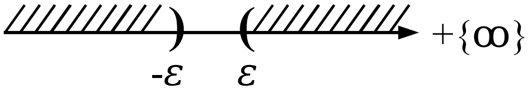
$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a,\varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a=\infty$

$$U(\infty,\varepsilon)=(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,+\infty)\cup\{\infty\}$$



Окрестность точки

ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε.

Окрестность точки

ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε. В этом случае ε просто подразумевается.

Окрестность точки

ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε. В этом случае ε просто подразумевается. Обозначения $U(a, \varepsilon)$ и $U(a)$ эквивалентны.

Окрестность точки

ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε. В этом случае ε просто подразумевается. Обозначения $U(a, \varepsilon)$ и $U(a)$ эквивалентны.

Если a – действительное число, то ее окрестность $U(a)$ также называют **двусторонней окрестностью**.

Определение

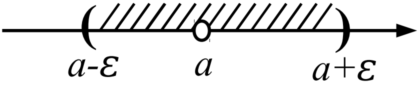
Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a, т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a,\varepsilon) = U(a,\varepsilon)\backslash a.$$

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a, т.е.

$$\mathring{U}(a,\varepsilon) = U(a,\varepsilon)\backslash a.$$



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести **односторонние окрестности**:

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести **односторонние окрестности**:

1) правосторонняя окрестность

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести **односторонние окрестности**:

1) правосторонняя окрестность

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$

Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести **односторонние окрестности**:

1) правосторонняя окрестность

$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon)$, $\overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$

2) левосторонняя окрестность

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести **односторонние окрестности**:

1) правосторонняя окрестность

$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$

2) левосторонняя окрестность

$U_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a], \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a)$

Типы стремления переменной к точке

Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x, которая принимает последовательно значения

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x, которая принимает последовательно значения

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

В зависимости от вида последовательности $\{x_n\}$ можно выделить несколько типов стремления переменной x к точке a.

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n \in \overset{\circ}{U}_+ (a, \varepsilon).$$

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

выбираем ε,

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_{+}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

$\forall n > 1$:

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$$

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \mathring{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

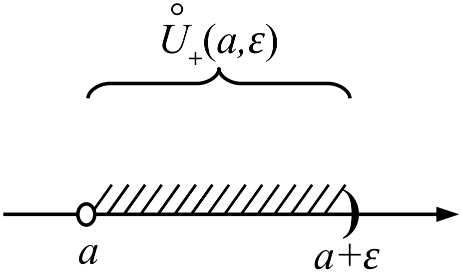
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

$\forall n > 1$:

$$x_n \in \mathring{U}_+(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a,\varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

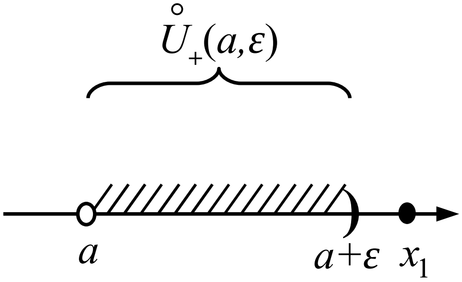
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

$\forall n > 1$:

$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a,\varepsilon)$



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

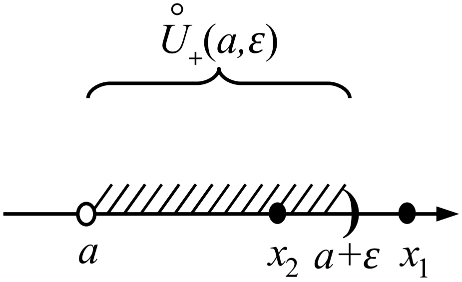
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

$\forall n > 1$:

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$$



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

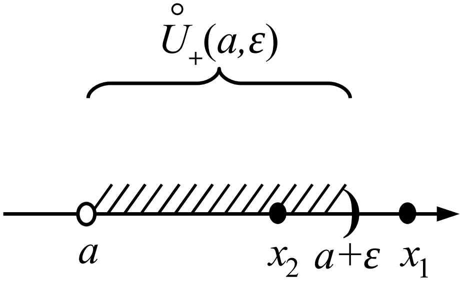
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/2) = 2$,



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

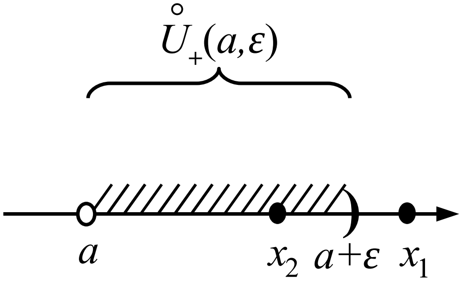
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/2) = 2$,

$\forall n > 2$:

$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon/2)$



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \mathring{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

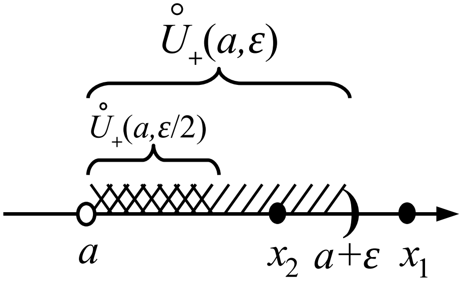
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/2) = 2$,

$\forall n > 2$:

$x_n \in \mathring{U}_+(a, \varepsilon/2)$



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

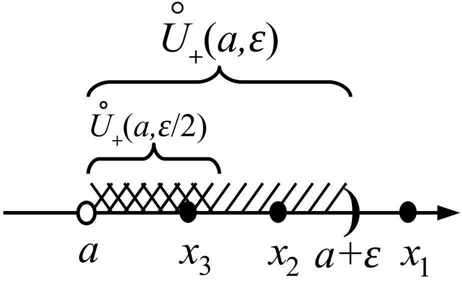
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/2) = 2$,

$\forall n > 2$:

$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon/2)$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

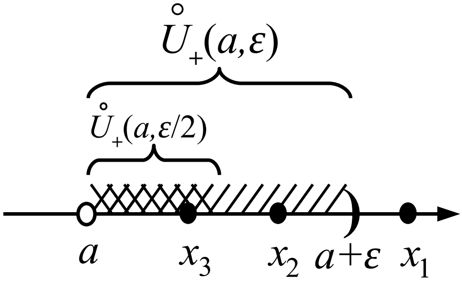
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \mathring{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/4) = 3$,



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \mathring{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

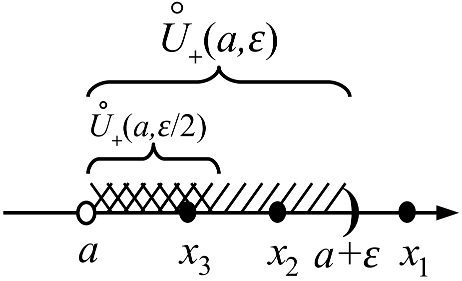
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/4) = 3$,

$\forall n > 3$:

$x_n \in \mathring{U}_+(a, \varepsilon/4)$



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

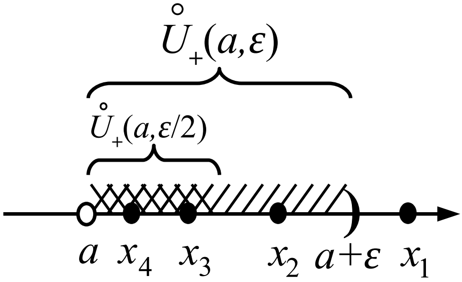
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/4) = 3$,

$\forall n > 3$:

$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon/4)$



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \mathring{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

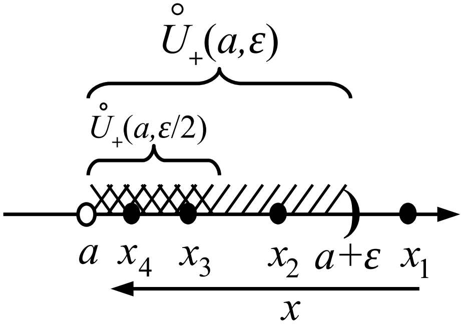
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/4) = 3$,

$\forall n > 3$:

$x_n \in \mathring{U}_+(a, \varepsilon/4)$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

Переменная x принимает значения x_1, x_2, ..., которые постепенно приближаются к точке a, при этом располагаются правее от нее на числовой прямой.

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon) \colon x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon) \colon x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

выбираем ε,

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

$\forall n > 1$:

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon)$$

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

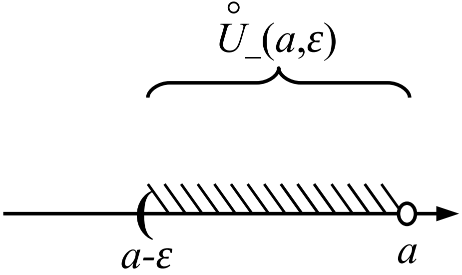
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

$\forall n > 1$:

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$$



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

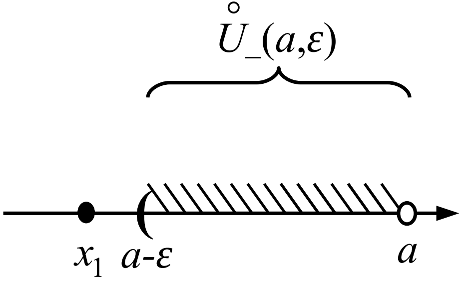
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

$\forall n > 1$:

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$$



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \mathring{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

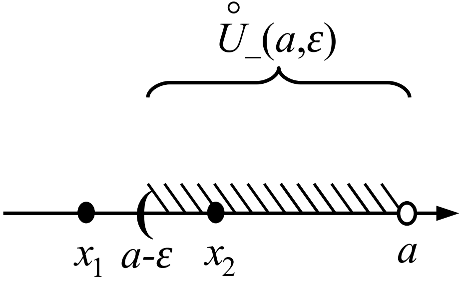
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

$\forall n > 1$:

$$x_n \in \mathring{U}_-(a, \varepsilon)$$



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

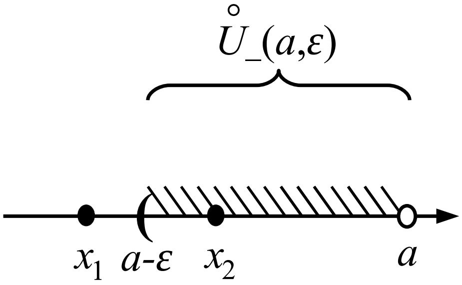
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/2) = 2$,



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

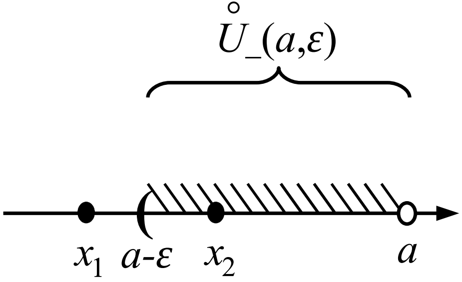
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/2) = 2$,

$\forall n > 2$:

$x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon/2)$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \mathring{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

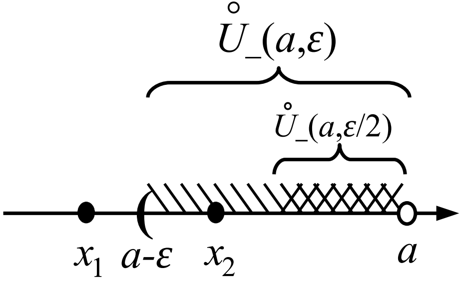
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/2) = 2$,

$\forall n > 2$:

$$x_n \in \mathring{U}_-(a, \varepsilon/2)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n \in \mathring{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

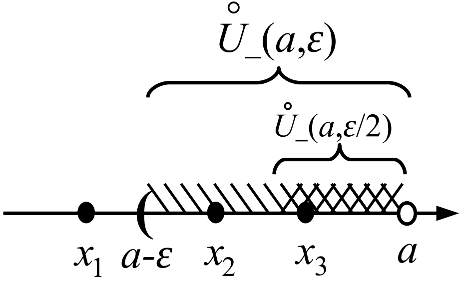
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/2) = 2$,

$\forall n > 2$:

$$x_n \in \mathring{U}_-(a, \varepsilon/2)$$



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

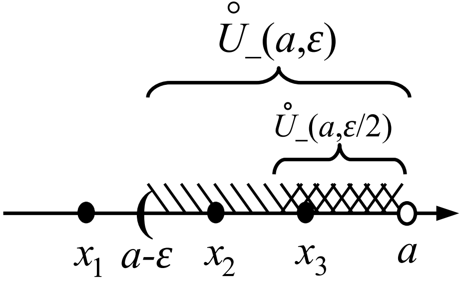
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \mathring{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/4) = 3$,



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \mathring{U}_-\,(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

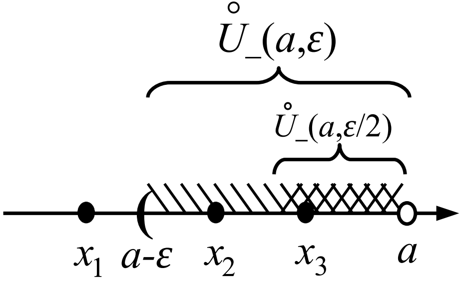
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/4) = 3$,

$\forall n > 3$:

$x_n \in \mathring{U}_-\,(a, \varepsilon/4)$



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_-\ (a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

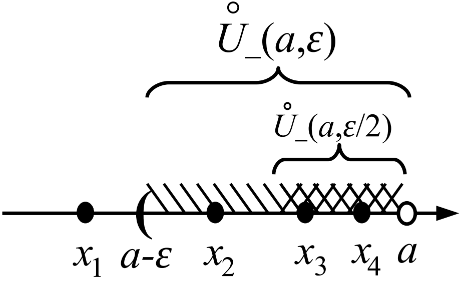
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/4) = 3$,

$\forall n > 3$:

$x_n \in \overset{\circ}{U}_-\ (a, \varepsilon/4)$



1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

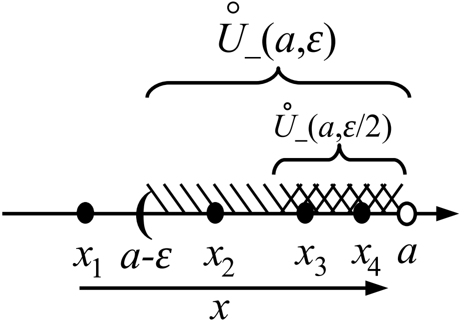
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/4) = 3$,

$\forall n > 3$:

$x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon/4)$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x \to x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n \in \overset{\circ}{U}_- (a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

Переменная x принимает значения $x_1, x_2, \ldots,$ которые постепенно приближаются к точке a, при этом располагаются левее от нее на числовой прямой.

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

Пример:

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon) \colon x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

Пример:

выбираем ε,

Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

$\forall n > 1$:

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$$

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

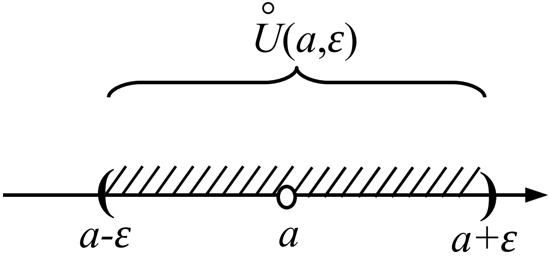
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

$\forall n > 1$:

$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$



2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

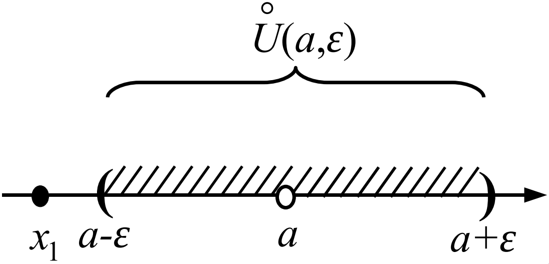
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

$\forall n > 1$:

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

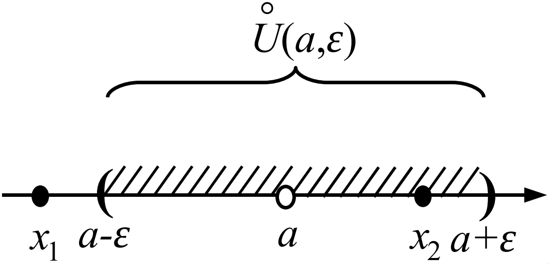
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon) = 1$,

$\forall n > 1$:

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

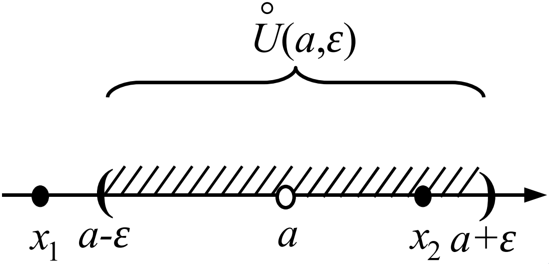
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/2) = 2$,



2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

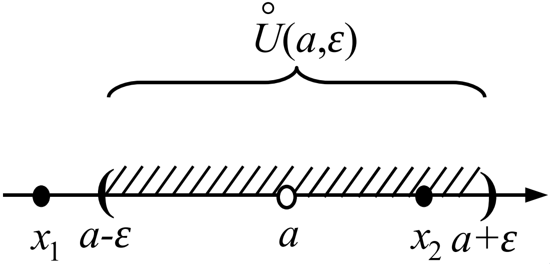
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/2) = 2$,

$\forall n > 2$:

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon/2)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \mathring{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

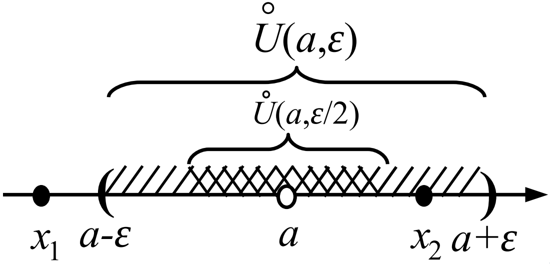
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/2) = 2$,

$\forall n > 2$:

$$x_n \in \mathring{U}(a, \varepsilon/2)$$



2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon) \colon x_n \in \mathring{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

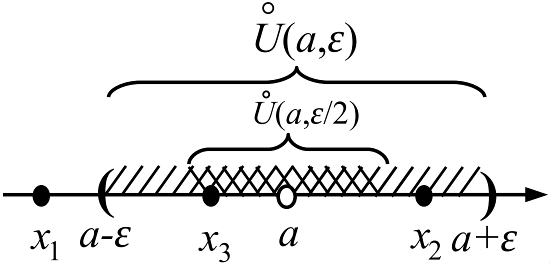
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/2) = 2$,

$\forall n > 2$:

$x_n \in \mathring{U}(a, \varepsilon/2)$



2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

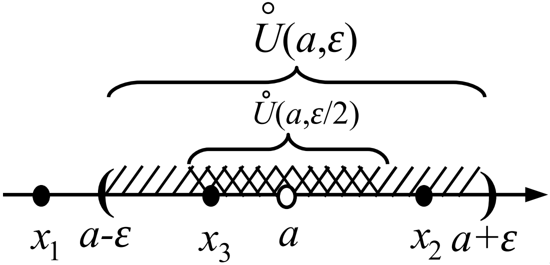
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/4) = 3$,



2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \mathring{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

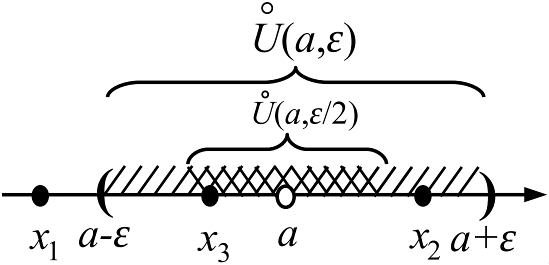
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/4) = 3$,

$\forall n > 3$:

$$x_n \in \mathring{U}(a, \varepsilon/4)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

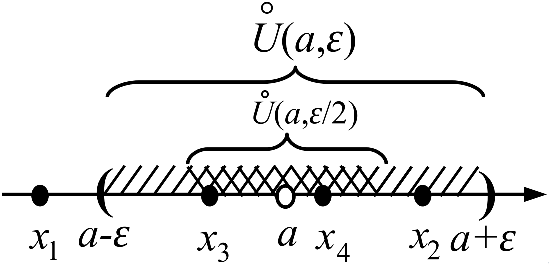
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/4) = 3$,

$\forall n > 3$:

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon/4)$$



2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):\ x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

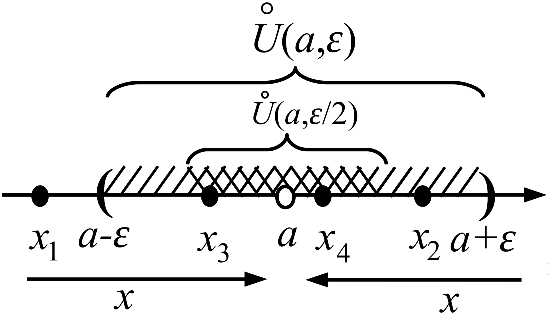
Пример:

выбираем ε,

$n(\varepsilon/4) = 3$,

$\forall n > 3$:

$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon/4)$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x \to x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon) \colon x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

Переменная x принимает значения $x_1, x_2, \ldots,$ которые постепенно приближаются к точке a, при этом, если a – конечное число, располагаются как справа, так и слева от нее на числовой прямой.

Предел функции

Пусть дана функция $f(x)$ и пусть $x \to a$,

Предел функции

Пусть дана функция $f(x)$ и пусть $x \to a$,
т.е. x принимает значения

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

постепенно приближающиеся к точке a.

Предел функции

Пусть дана функция $f(x)$ и пусть $x \to a$,
т.е. x принимает значения

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

постепенно приближающиеся к точке a.
Им соответствуют значения функции

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots,$$

которые постепенно приближаются к точке b.

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)

Предел функции

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a, если любой такой последовательности значений переменной $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in N \; x_n \neq a,$$

Предел функции

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a, если любой такой последовательности значений переменной $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in N \; x_n \neq a,$$

соответствует последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b.

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a, если любой такой последовательности значений переменной $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in N \; x_n \neq a,$$

соответствует последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Геометрическая интерпретация предела

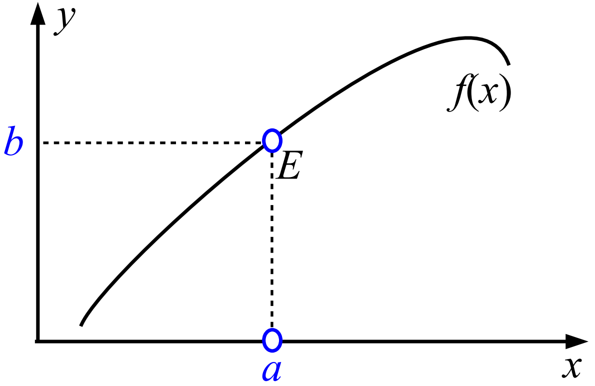
(a и b – конечные числа)

Геометрическая интерпретация предела

(a и b – конечные числа)

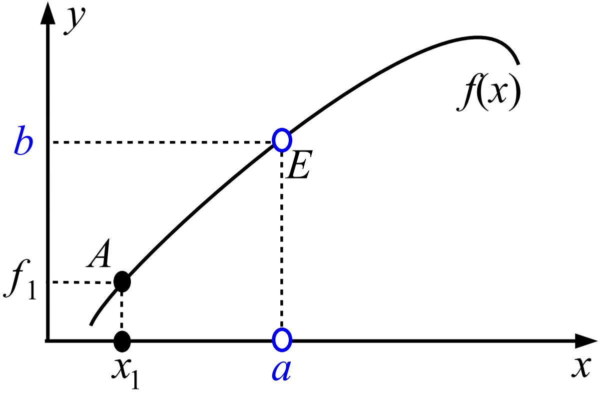
Геометрическая интерпретация предела

(a и b – конечные числа)



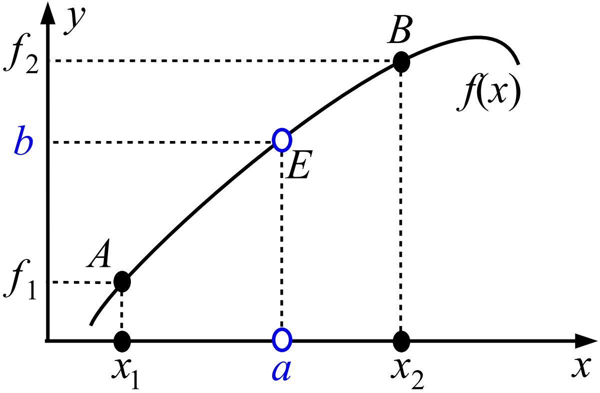
Геометрическая интерпретация предела

(a и b – конечные числа)



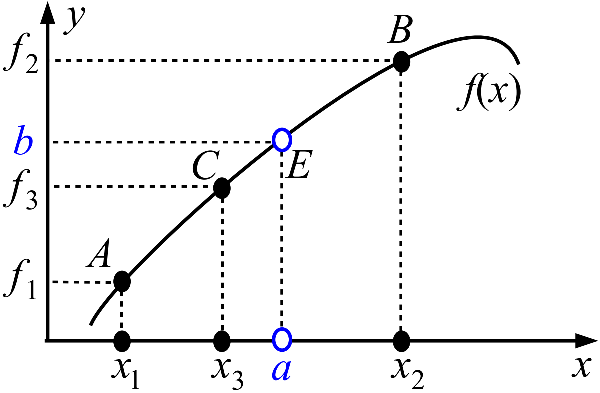
Геометрическая интерпретация предела

(a и b – конечные числа)



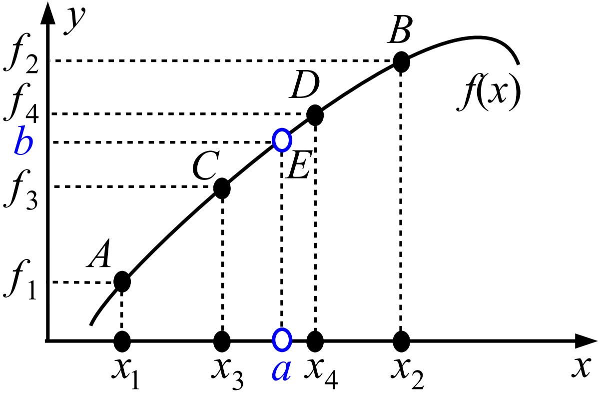
Геометрическая интерпретация предела

(a и b – конечные числа)



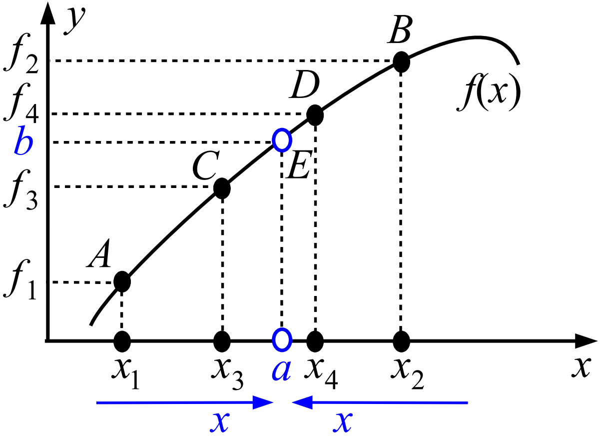
Геометрическая интерпретация предела

(a и b – конечные числа)



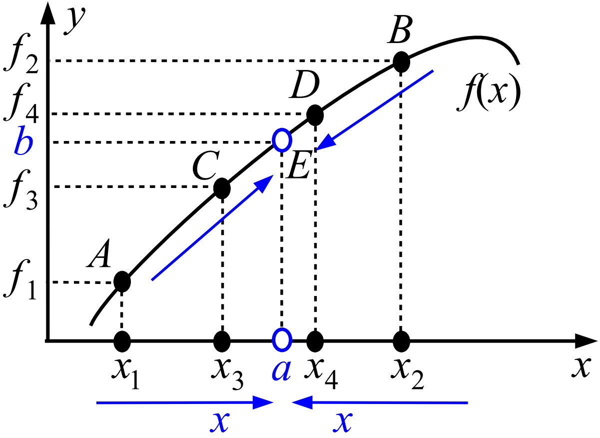
Геометрическая интерпретация предела

(a и b – конечные числа)



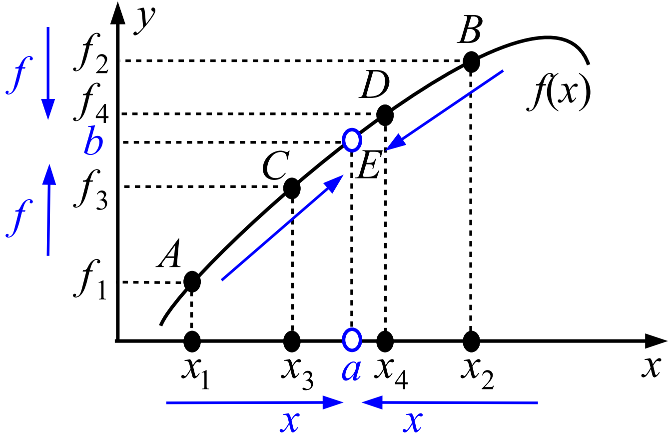
Геометрическая интерпретация предела

(a и b – конечные числа)



Геометрическая интерпретация предела

(a и b – конечные числа)



Если b – конечное число, то предел называется **конечным**.

Предел функции

Если b – конечное число, то предел называется **конечным**.

Если b – бесконечное число, то предел называется **бесконечным**.

Предел функции

Если b – конечное число, то предел называется **конечным**.

Если b – бесконечное число, то предел называется **бесконечным**.

Если a – конечное число, то предел называется **двусторонним**.

Определение предела
(в терминах окрестностей, по Коши)

Определение предела
(в терминах окрестностей, по Коши)
Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a, если

$$\forall U(b,\varepsilon)\ \exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)\colon f(x) \in U(b,\varepsilon).$$

Расшифровка математических символов:

Расшифровка математических символов:
$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b,\varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - для любой точки x из этой окрестности

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - для любой точки x из этой окрестности

: - выполняется

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b,\varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - для любой точки x из этой окрестности

: - выполняется

$f(x) \in U(b,\varepsilon)$ - значение функции f в точке x принадлежит ε-окрестности точки b

Определение предела
(в терминах неравенств для конечных точек,
на языке $\varepsilon - \delta$)

Определение предела
(в терминах неравенств для конечных точек,
на языке $\varepsilon - \delta$)

Конечная точка b называется **пределом** функции $f(x)$ в конечной точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta: \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

Расшифровка математических символов:

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

, - удовлетворяющего условию

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ - $|x - a|$ больше нуля и меньше δ

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall\varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists\delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ - $|x - a|$ больше нуля и меньше δ

: - выполняется

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ - $|x - a|$ больше нуля и меньше δ

: - выполняется

$|f(x) - b| < \varepsilon$ - $|f(x) - b|$ меньше ε

Арифметические свойства конечных пределов

Арифметические свойства конечных пределов

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, где b и c - конечные числа, то

Арифметические свойства конечных пределов

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, где b и c - конечные числа, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$,

Арифметические свойства конечных пределов

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, где b и c - конечные числа, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$,

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$,

Арифметические свойства конечных пределов

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, где b и c - конечные числа, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$,

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$,

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = b/c$, если $c \neq 0$.

Односторонние пределы

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)

Односторонние пределы

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)
Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** в конечной точке a, если любой такой последовательности значений переменной $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in N \; x_n < a,$$

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)
Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** в конечной точке a, если любой такой последовательности значений переменной $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in N \; x_n < a,$$

соответствует последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b.

Односторонние пределы

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)
Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** в конечной точке a, если любой такой последовательности значений переменной $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in N \; x_n < a,$$

соответствует последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.

Односторонние пределы

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)

Односторонние пределы

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** в конечной точке a, если любой такой последовательности значений переменной $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in N \ x_n > a,$$

Односторонние пределы

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)
Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** в конечной точке a, если любой такой последовательности значений переменной $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in N \; x_n > a,$$

соответствует последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b.

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)
Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** в конечной точке a, если любой такой последовательности значений переменной $\{x_n\}$, что

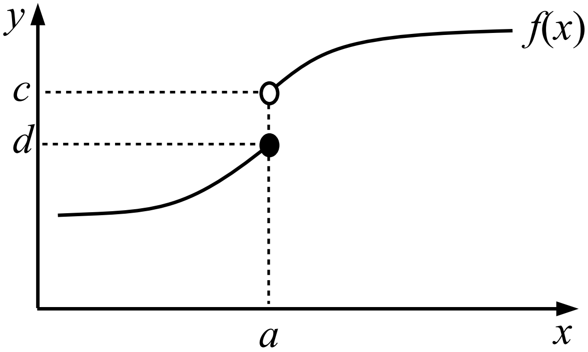
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in N \; x_n > a,$$

соответствует последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

Геометрическая интерпретация:

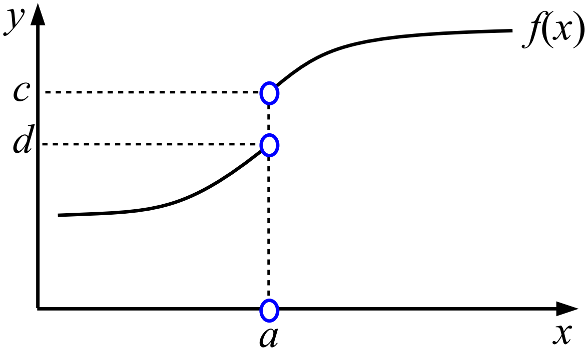
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



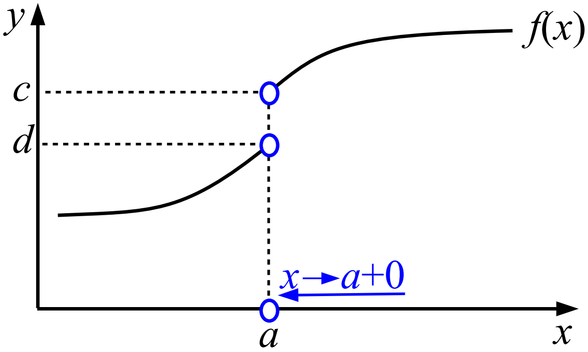
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



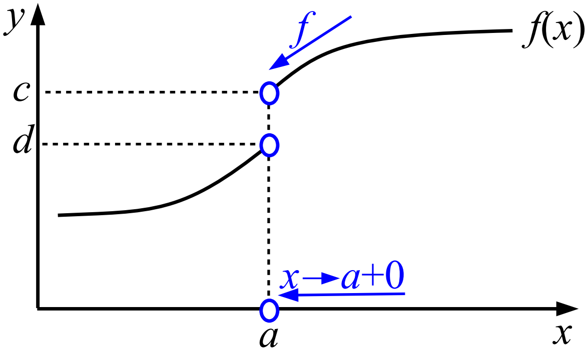
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



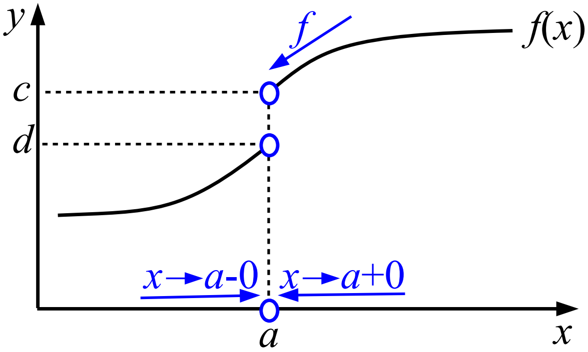
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:

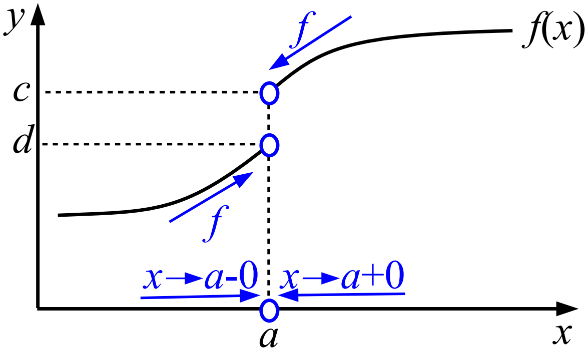


Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:

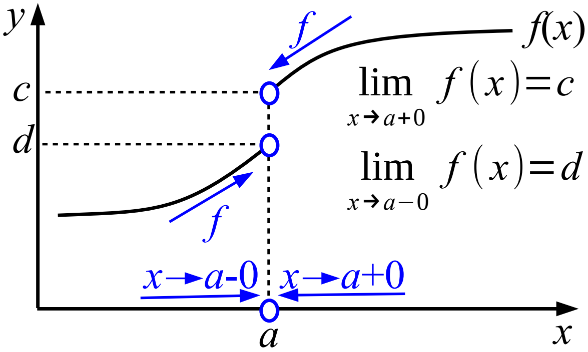


Геометрическая интерпретация:



Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)

Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)

Функция $f(x)$ имеет в точке a двусторонний предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы и они равны, причем их общее значение является значением двустороннего предела.