

# Математический анализ

## Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

### Лекция 2.5

#### Аннотация

Свойства функций, непрерывных в точке (продолжение). Непрерывность функции на промежутке. Наклонные и вертикальные асимптоты графика функции.

## 1 Свойства функций, непрерывных в точке

*Теорема (локальная ограниченность непрерывной функции)\**

Если  $f(x) \in C(a)$ , то существует такая окрестность точки  $a$ , в которой функция  $f(x)$  ограничена.

*Доказательство*

$$f(x) \in C(a)$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть  $\varepsilon = 1$ . Тогда  $\exists \delta_1 = \delta(1)$ , такое что

$$\forall x \in R, |x - a| < \delta_1: |f(x) - f(a)| < 1$$

или

$$\forall x \in U(a, \delta_1): |f(x) - f(a)| < 1.$$

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1): f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1.$$

Это означает, что существует окрестность точки  $a$ , в которой функция  $f(x)$  ограничена. ■

*Теорема (локальное знакопостоянство непрерывной функции)\**

Если  $f(x) \in C(a)$  и  $f(a) \neq 0$ , то в некоторой окрестности точки  $a$  функция  $f(x)$  сохраняет свой знак.

*Доказательство*

Рассмотрим случай  $f(a) > 0$ .

$$f(x) \in C(a)$$

↓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть  $\varepsilon = f(a)$ . Тогда  $\exists \delta_1 = \delta(f(a))$ , такое что

$$\forall x \in R, |x - a| < \delta_1: |f(x) - f(a)| < f(a)$$

или

$$\forall x \in U(a, \delta_1): |f(x) - f(a)| < f(a).$$

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1): 0 < f(x) < 2f(a).$$

Это означает, что существует окрестность точки  $a$ , в которой  $f(x) > 0$ , т.е. функция  $f(x)$  сохраняет свой знак. Аналогично доказывается для  $f(a) < 0$ . ■

## 2 Непрерывность функции на промежутке

*Определение*

Функция, определенная на интервале  $(a, b)$  и непрерывная в каждой его точке, называется **непрерывной на этом интервале**.

Обозначение:  $f(x) \in C(a, b)$ .

*Определение*

Функция, определенная на отрезке  $[a, b]$ , называется **непрерывной на этом отрезке**, если она непрерывна на интервале  $(a, b)$ , непрерывна справа в точке  $a$  и непрерывна слева в точке  $b$ .

Обозначение:  $f(x) \in C[a, b]$ .

*Теорема (теорема Вейерштрасса)*

Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена на этом отрезке и достигает на нем своих точной верхней и точной нижней граней.

Математическая формулировка теоремы:

$$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists x', x'' \in [a, b]: \sup_{[a, b]} f(x) = f(x'), \inf_{[a, b]} f(x) = f(x'') \\ \text{и } \forall x \in [a, b] : f(x'') \leq f(x) \leq f(x').$$

*Теорема (теорема Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции)*

Если  $f(x) \in C[a, b]$ , то для любого числа  $C$ , заключенного между  $f(a)$  и  $f(b)$ , существует такая точка  $c \in [a, b]$ , что  $f(c) = C$ .

*Теорема (о непрерывности обратной функции)*

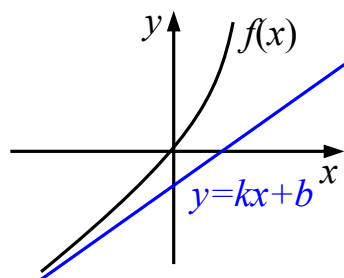
Пусть функция  $f(x)$  определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , тогда обратная функция  $f^{-1}(y)$  определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке с концами в точках  $f(a)$  и  $f(b)$ .

### 3 Асимптоты графика функции

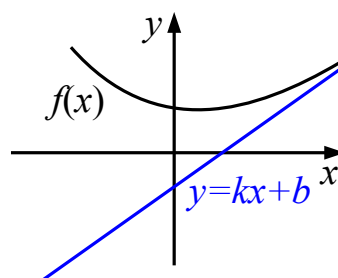
*Определение*

Пусть функция  $f(x)$  определена для всех  $x > a$  (или  $x < a$ ). Если существуют такие числа  $k$  и  $b$ , что функция  $f(x) - (kx + b)$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow +\infty$  (или  $x \rightarrow -\infty$ ), то прямая  $y = kx + b$  называется **наклонной асимптотой** графика функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  (или  $x \rightarrow -\infty$ ).

Графически асимптота является прямой, расстояние до которой от графика функции стремится к нулю.



Левая наклонная  
асимптота



Правая наклонная  
асимптота

Коэффициенты наклонных асимптот находятся по формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

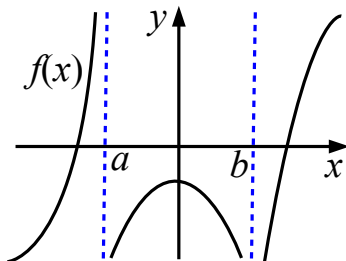
Если хотя бы один из коэффициентов  $k$  и  $b$  равен бесконечности или не существует, то функция не имеет соответствующей наклонной асимптоты.

### Определение

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , и пусть выполняется хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

Тогда прямая  $x = a$  называется **вертикальной асимптотой** графика функции  $f(x)$ .



На рисунке  $x = a$  и  $x = b$  – вертикальные асимптоты.