Математический анализ
Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной
Лекция 2.4

Аннотация

Непрерывность функций: два эквивалентных определения, необходимое и достаточное условие непрерывности. Односторонняя непрерывность слева и справа. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных в точке.

1 Непрерывность функции

Определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности конечной точки a, называется **непрерывной** в этой точке, если
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Эквивалентное определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности конечной точки a, называется **непрерывной** в этой точке, если
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta\colon \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

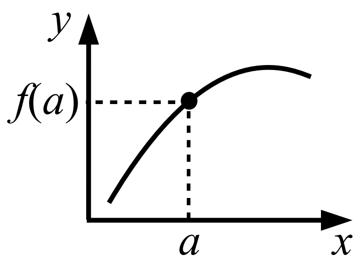
Обозначение: $f(x) \in C(a)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Замечание

Непрерывность функции предполагает, что эта функция определена в некоторой окрестности точки a, включая саму точку a.

Геометрическая интерпретация

Графически непрерывность функции в конечной точке a означает, что ее график в окрестности точки a представляет собой сплошную линию, которая не претерпевает каких-либо разрывов при переходе через саму точку a.



$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности. Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

1) необходимо и достаточно,

2) тогда и только тогда, когда.

Например, выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как

1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B.

2. Для справедливости утверждения A необходима и достаточна справедливость утверждения B.

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что утверждения A и B справедливы или нет одновременно:

а) если справедливо A, то должно быть справедливо B,

б) если справедливо B, то должно быть справедливо A.

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ - приращение значения аргумента x в точке a,

$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ - приращение значения функции $f(x)$ в точке a.

*Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке)**

$$f(x) \in C(a) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

$\Leftrightarrow$ - необходимо и достаточно, чтобы

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ - предел приращения значения функции в точке a равнялся нулю при стремлении к нулю приращения аргумента.

Доказательство

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \in C(a)$

Доказать: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

Доказательство:

$$f(x) \in C(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta\colon |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Далее,

$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x \Rightarrow f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta f.$

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta\colon |\Delta f| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$

2. Достаточность.
Дано: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0$
Доказать: $f(x)\in C(a)$
Доказательство:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall\Delta x\in R, |\Delta x|<\delta\colon |\Delta f|<\varepsilon.$$

Так как
$$\Delta x = x-a, \Delta f = f(a+\Delta x)-f(a) = f(x)-f(a),$$
то
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in R, |x-a|<\delta\colon |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$
$$\Downarrow$$
$$f(x)\in C(a).\ \blacksquare$$

2 Односторонняя непрерывность

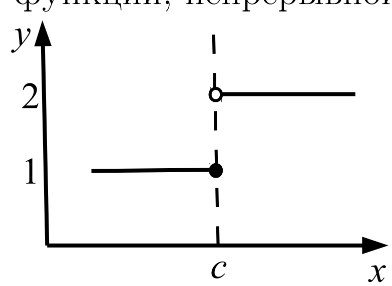
Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a,c]$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева** в конечной точке c, если
$$\lim_{x\to c-0} f(x) = f(c).$$

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[c,b)$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа** в конечной точке c, если
$$\lim_{x\to c+0} f(x) = f(c).$$

Пример функции, непрерывной слева:



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\le c\\ 2, & x>c\end{cases}$$

3 Точки разрыва

Определение

Конечная точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке a или определена, но не является в ней непрерывной.

Классификация точек разрыва

1. Если a - точка разрыва функции $f(x)$ и в этой точке существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \text{ и } \lim_{x\to a+0} f(x),$$

то точка a называется **точкой разрыва первого рода**.

1.1. Если a - точка разрыва первого рода и

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x),$$

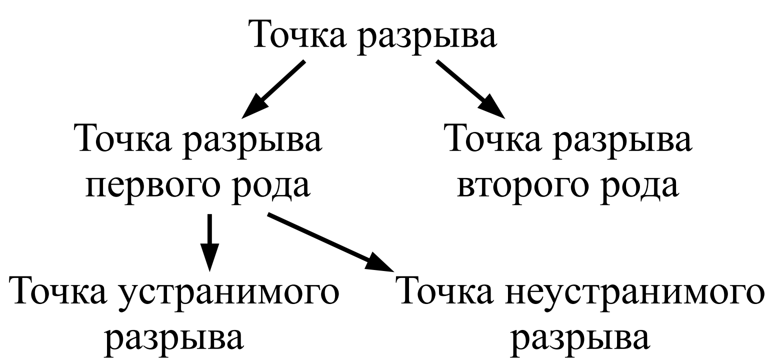
то a называется **точкой устранимого разрыва первого рода**.

1.2. Если a - точка разрыва первого рода и

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x),$$

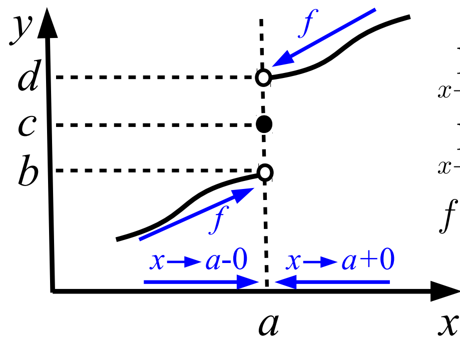
то a называется **точкой неустранимого разрыва первого рода**.

2. Точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется **точкой разрыва второго рода**.



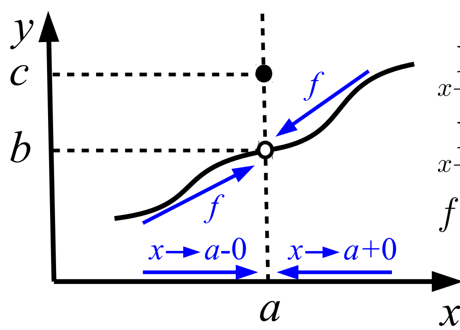
Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода



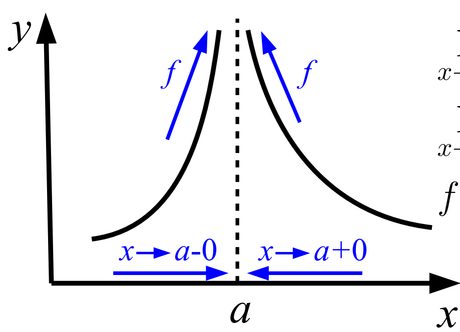
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = d,$$
$$f(a) = c.$$

2) точка устранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b,$$
$$f(a) = c.$$

3) точка разрыва второго рода



$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty,$$
$f(a)$ - неопределена.

4 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f(x) + g(x) \in C(a)$,

2) $f(x) \cdot g(x) \in C(a)$,

3) $f(x)/g(x) \in C(a)$, если $g(a) \neq 0$.

Теорема (непрерывность сложной функции)

Если $f(x) \in C(a)$ и $g(y) \in C(b)$, где $b = f(a)$, то $g(f(x)) \in C(a)$.

*Теорема (непрерывность основных элементарных функций)**

Основные элементарные функции непрерывны всюду в их области определения.

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$
$$= 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) =$$
$$= |\text{бесконечно малая} \cdot \text{ограниченная} = \text{бесконечно малая}| = 0.$$
$$\Rightarrow \sin x \in C(x). \blacksquare$$

Теорема (непрерывность элементарной функции)

Любая элементарная функция непрерывна в любой точке области ее определения.