Математический анализ
Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной
Лекция 2.3

Аннотация

Сравнение функций. О-большое и о-малое. Эквивалентные функции и их применение к вычислению предела. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

1 Сравнение функций

Пусть $\overset{\circ}{U}(a)$ - некоторая проколотая окрестность точки a.

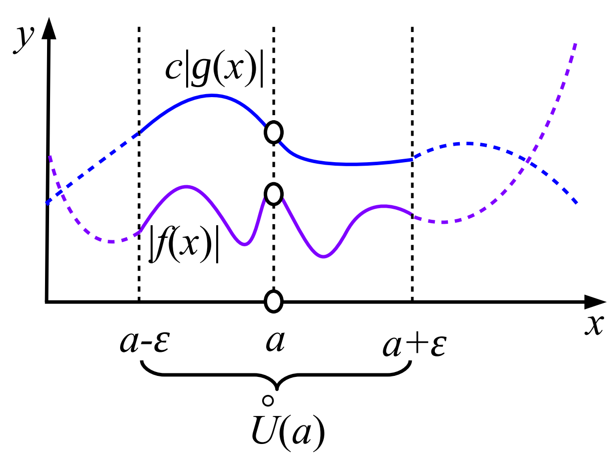
Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\overset{\circ}{U}(a)$, если $\exists c > 0\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$: $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$.

Обозначение: $f(x) = O(g(x)), x \to a$.

Произношение: f - это "O"-большое от g при $x \to a$.

Пример:



Определение

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$, то они называются **функциями одного порядка** при $x \to a$.

Обозначение: $f(x) \asymp g(x), x \to a$.

Определение

Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$ $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ называются **эквивалентными** при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Обозначение: $f(x) \sim g(x), x \to a$.

Свойства эквивалентных функций

1) если $f(x) \sim g(x), x \to a$, то $g(x) \sim f(x), x \to a$,

2) если $f(x) \sim g(x), g(x) \sim h(x), x \to a$, то $f(x) \sim h(x), x \to a$.

Определение

Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$ $f(x) \neq 0$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

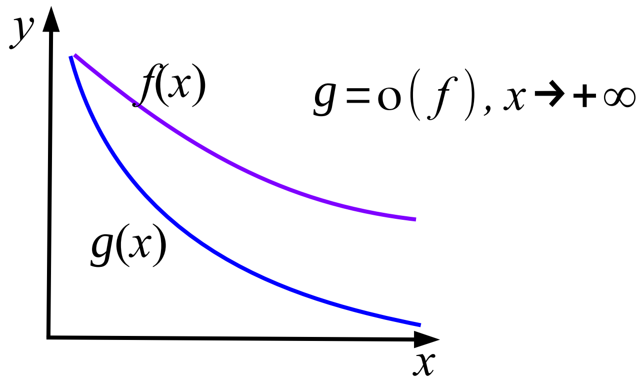
Обозначение: $g(x) = \circ(f(x)), x \to a$.

Произношение: g - это “о”-малое от f при $x \to a$.

Определение

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые функции при $x \to a$ и $g(x) = \circ(f(x)), x \to a$. Тогда говорят, что $g(x)$ является **бесконечно малой более высокого порядка**, чем $f(x)$.

Пример:



Здесь обе функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$, только функция $g(x)$ убывает быстрее, чем функция $f(x)$.

Определение

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые функции при $x \to a$ и $g(x) = \circ(f(x)), x \to a$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой порядка r относительно** функции $f(x)$, если существует не равный нулю конечный предел

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(f(x))^r}.$$

Свойства “о”-малое

1) $\circ(f) + \circ(f) = \circ(f)$,
2) $\circ(cf) = \circ(f), c \neq 0$,
3) $c \cdot \circ(f) = \circ(f), c \neq 0$,
4) $\circ(\circ(f)) = \circ(f)$.

*Теорема (о связи эквивалентности и “о”-малое)**

Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a.$$

Замечание

Фраза "необходимо и достаточно"в формулировке теоремы означает, что данная теорема определяет условие, которое одновременно является и необходимым, и достаточным. Чтобы доказать теорему, нужно доказать отдельно необходимость данного условия и отдельно его достаточность.

Введем обозначения:
Утверждение A – "функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to a$".
Условие B – "$f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$".

Тогда наша теорема перепишется в виде:

Для истинности *утверждения* A необходима и достаточна истинность *условия* B.

Необходимость *условия* B означает, что *утверждение* A не может быть истинным, если *условие* B ложно. Соответственно, если *утверждение* A истинно, то *условие* B также должно быть истинным.

Достаточность *условия* B означает, что, если *условие* B истинно, то *утверждение* A также истинно.

Таким образом, фраза "необходимо и достаточно"означает, что из истинности *утверждения* A следует истинность *условия* B (читаем исходную теорему слева направо), а из истинности *условия* B следует истинность *утверждения* A (читаем теорему справа налево).

Доказательство теоремы

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \sim g(x), x \to a$ (*утверждение* A).

Доказать: $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$ (*условие* B).

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Далее,

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) = (\varphi(x) - 1)g(x).$$

Откуда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}(\varphi(x) - 1) = 1 - 1 = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) - g(x) = \circ(g(x)), x \to a$$

и

$$f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a.$$

2. Достаточность.

Дано: $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$ (*условие* B).

Доказать: $f(x) \sim g(x), x \to a$ (*утверждение* A).

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x) + \circ(g(x))}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}(1+\dfrac{\circ(g(x))}{g(x)}) = 1+\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\circ(g(x))}{g(x)} =$
$= 1 + 0 = 1. \Rightarrow f(x) \sim g(x), x \to a.$ ■

Определение

Если функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a,$$

то функция $g(x)$ называется **главной частью** функции $f(x)$.

*Теорема (о пределах эквивалентных функций)**

Пусть $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to a$. Тогда если существует

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

то существует и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},$$

причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Доказательство

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g} = \lim_{x\to a}\frac{f\cdot f_1\cdot g_1}{f_1\cdot g_1\cdot g} = \lim_{x\to a}\frac{f}{f_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f_1}{g_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g_1}{g} = \lim_{x\to a}\frac{f_1}{g_1}. \blacksquare$$

Для применения этой теоремы необходимо знать таблицу эквивалентных функций.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

1) $\sin x \sim x, x\to 0$
2) $\operatorname{tg} x \sim x, x\to 0$
3) $\arcsin x \sim x, x\to 0$
4) $\operatorname{arctg} x \sim x, x\to 0$
5) $1-\cos x \sim x^2/2, x\to 0$
6) $\ln(1+x) \sim x, x\to 0$
7) $a^x - 1 \sim x\ln a, x\to 0$
8) $e^x - 1 \sim x, x\to 0$
9) $(1+x)^m - 1 \sim mx, x\to 0$

Используя теорему о замене переменной можно показать, что в данной таблице отношение эквивалентности сохранится, если переменную x заменить на какую-либо функцию u при условии, что $u\to 0$.

Примеры:

1) $\sin u \sim u, u \to 0$
2) $\operatorname{tg} u \sim u, u \to 0$
3) $e^u - 1 \sim u, u \to 0$

Здесь $u = u(x)$ - некоторая функция, которая должна стремиться к нулю: $u \to 0$.

