# Математический анализ<br>Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной<br>**Лекция 2.2**

**Аннотация**

Общие свойства пределов. Первый замечательный предел и его следствия. Второй замечательный предел и его следствия. Бесконечно малые функции. Бесконечно большие функции.

## 1 Общие свойства пределов

*Теорема (локальная ограниченность функции)**

Если функция $f(x)$ имеет в точке $a$ конечный предел, то существует такая проколотая окрестность точки $a$, в которой функция $f(x)$ ограничена.

*Доказательство*

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где $b$ - конечное число. Тогда по определению предела в терминах окрестностей

$$\forall U(b,\varepsilon)\ \exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)\colon f(x) \in U(b,\varepsilon).$$

Поскольку $b$ - конечное число, то

$$U(b,\varepsilon) = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

и

$$f(x) \in U(b,\varepsilon) \Leftrightarrow f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon),$$
$$\forall U(b,\varepsilon) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0.$$

Соответственно, рассмотренное выше определение предела можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)\colon f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

 

Положим $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta_1)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_1)\colon f(x) \in (b-1, b+1),$$

где $\delta_1$ - значение $\delta$, соответствующее выбранному значению $\varepsilon = 1$.

Мы получили, что у точки $a$ имеется проколотая окрестность, в которой значения функции $f(x)$ заключены между числами $b-1$ (нижняя граница) и $b+1$ (верхняя граница). Это означает ограниченность функции в некоторой проколотой окрестности точки $a$. ■

*Теорема (локальная знакоопределенность функции)**

Если в точке $a$ функция $f(x)$ имеет не равный нулю конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности точки $a$ функция имеет тот же знак, что и сам предел.

*Доказательство*

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где $b$ - конечное число, $b > 0$. При доказательстве предыдущей теоремы было показано, что для конечного числа $b$ определение предела можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)\colon f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = b$. Тогда

$$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta_b)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_b)\colon f(x) \in (0, 2b),$$

где $\delta_b$ - значение $\delta$, соответствующее выбранному значению $\varepsilon = b$.

Мы получили, что в некоторой проколотой окрестности точки $a$ функция $f(x)$ положительна, т.е. ее знак совпадает со знаком числа $b$.

Случай $b < 0$ доказывается аналогично. ■

*Теорема (1-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)*

Если $f(x) \geq A$ в некоторой проколотой окрестности точки $a$ и имеет в этой точке конечный или бесконечный определенного знака предел, то

$$\lim_{x\to a} f(x) \geq A.$$

*Теорема (2-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)*

Если $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки $a$ и

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) = \lim_{x\to a}\psi(x) = A,$$

где $A$ - конечное число или бесконечность определенного знака, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

*Теорема (единственность предела)*

Если функция $f(x)$ имеет в точке $a$ конечный предел, то этот предел единственный.

*Теорема (предел сложной функции и замена переменной)*

Пусть существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ и } \lim_{y\to b} g(y),$$

и пусть в некоторой проколотой окрестности точки $a$ имеет место $f(x) \ne b$. Тогда в точке $a$ существует предел сложной функции $g(f(x))$ и

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y).$$

# 2 Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$$

Здесь $u$ - произвольная функция, которая обладает свойством:

$$u \to 0.$$

Примеры:

1) $u = 5x \to 0$ при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x} = 1,$

2) $u = 2x - 2 \to -2$ при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x-2)}{2x-2} \neq 1.$

Следствия:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\arcsin u}{u} = 1$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \qquad \lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e$$

Здесь $u$ - произвольная функция, которая обладает свойством:
$u \to 0.$

Примеры:
1) $u = 3x \to 0$ при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/3x} = e,$
2) $u = 4x - 1 \to -1$ при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+(4x-1))^{1/(4x-1)} \neq e.$

Следствия:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u} = \ln a$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u} = 1$$

# 3 Бесконечно малые функции

*Определение*

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

*Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)**

Конечный предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует и равен $b$ тогда и только тогда, когда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

*Замечание*

Фраза "тогда и только тогда, когда"в формулировке теоремы означает, что данная теорема является составной и состоит из двух простых теорем - прямой и обратной.

Прямая теорема читается слева направо:

Если конечный предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует и равен $b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Обратная теорема читается справа налево:

Если $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$, то конечный предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует и равен $b$.

Чтобы доказать исходную составную теорему, нужно доказать каждую из составляющих ее простых теорем.

*Доказательство теоремы*

*1. Прямая теорема.*

Дано: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $b$ - конечное число.

Доказать: $f(x) = b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел: $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a}(f(x)-b) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} b = b - b = 0$. Получаем, что $\alpha(x)$ - это бесконечно малая при $x \to a$.

Т.к. $\alpha(x) = f(x) - b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$.

*2. Обратная теорема.*

Дано: $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Доказать: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b$ - конечное число.

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}(b + \alpha(x)) = \lim\limits_{x\to a} b + \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = b + 0 = b$. ■

*Свойства бесконечно малых функций**

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$, а $\gamma(x)$ - ограниченная функция. Тогда

1) $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$,

2) $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$,

3) $\alpha(x) \cdot \gamma(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

*Доказательство свойства 1*

$\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x) + \beta(x)) = \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) + \lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0 + 0 = 0$.

$\Rightarrow \alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$. ■

# 4 Бесконечно большие функции

*Определение*

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

*Теорема (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций)*

Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to a$, то функция $1/f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.