Математический анализ
Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной
Лекция 2.1

Аннотация

Окрестность точки. Типы стремления переменной к точке. Предел функции в терминах последовательностей, окрестностей и неравенств. Арифметические свойства пределов. Односторонние пределы.

1 Окрестность точки

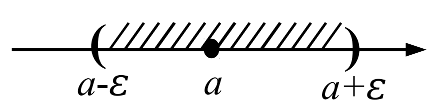
Здесь и далее под **точкой** будем понимать как конечное, так и бесконечное число.

Определение

ε-окрестность точки a обозначается как $U(a,\varepsilon)$ и определяется по формулам:

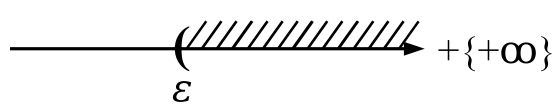
1) a - действительное число

$U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

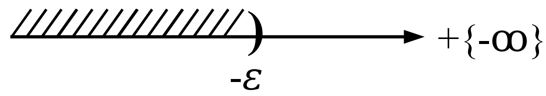


2) $a = +\infty$

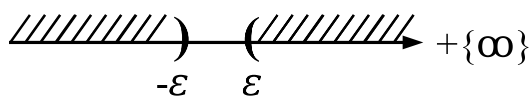
$U(+\infty,\varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$



3) $a = -\infty$
$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$



4) $a = \infty$
$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$



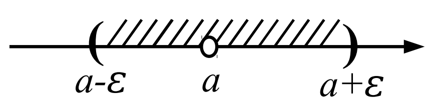
ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε. В этом случае ε просто подразумевается. Обозначения $U(a, \varepsilon)$ и $U(a)$ эквивалентны.

Если a – действительное число, то ее окрестность $U(a)$ также называют **двусторонней окрестностью**.

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a, т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \backslash a.$$



Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести **односторонние окрестности**:

1) правосторонняя окрестность
$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$
2) левосторонняя окрестность
$U_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a], \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a)$

2 Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x, которая принимает последовательно значения $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. В зависимости от вида последовательности $\{x_n\}$ можно выделить несколько типов стремления переменной x к точке a.

1. Одностороннее стремление (a – конечное число)

А. Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

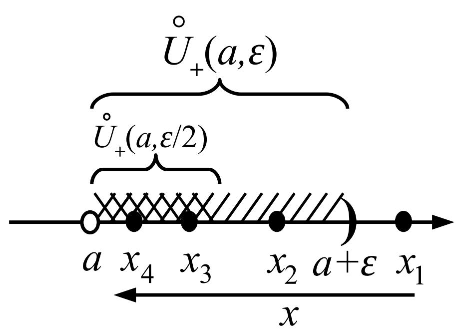
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}_+ (a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

Выберем ε так, чтобы $n(\varepsilon) = 1$, $n(\varepsilon/2) = 2$ и $n(\varepsilon/4) = 3$. Тогда $\forall n{>}1$: $x_n{\in}\overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$, $\forall n{>}2$: $x_n{\in}\overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon/2)$ и $\forall n{>}3$: $x_n{\in}\overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon/4)$.

Переменная x принимает значения x_1, x_2, ..., которые постепенно приближаются к точке a, при этом располагаются правее от нее на числовой прямой.



Б. Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

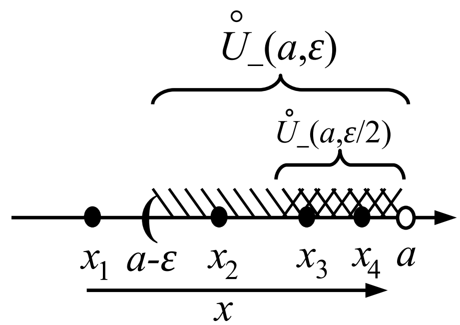
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \overset{\circ}{U}_- (a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

Выберем ε так, чтобы $n(\varepsilon) = 1$, $n(\varepsilon/2) = 2$ и $n(\varepsilon/4) = 3$. Тогда $\forall n{>}1$: $x_n{\in}\overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$, $\forall n{>}2$: $x_n{\in}\overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon/2)$ и $\forall n{>}3$: $x_n{\in}\overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon/4)$.

Переменная x принимает значения x_1, x_2, ..., которые постепенно приближаются к точке a, при этом располагаются левее от нее на числовой прямой.



2. Двустороннее стремление (a – любое число)

Говорят, что x **стремится** к a, если

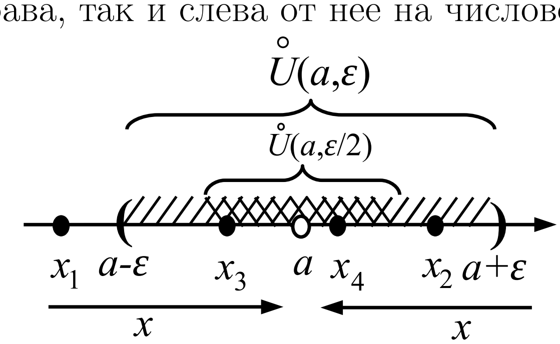
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ x_n \in \mathring{U}\ (a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

Пример:

Выберем ε так, чтобы $n(\varepsilon) = 1$, $n(\varepsilon/2) = 2$ и $n(\varepsilon/4) = 3$. Тогда $\forall n{>}1$: $x_n{\in}\mathring{U}(a, \varepsilon)$, $\forall n{>}2$: $x_n{\in}\mathring{U}(a, \varepsilon/2)$ и $\forall n{>}3$: $x_n{\in}\mathring{U}(a, \varepsilon/4)$.

Переменная x принимает значения x_1, x_2, ..., которые постепенно приближаются к точке a, при этом, если a – конечное число, располагаются как справа, так и слева от нее на числовой прямой.



3 Предел функции

Пусть дана функция $f(x)$ и пусть $x \to a$, т.е. x принимает значения x_1, x_2, ..., x_n, ..., постепенно приближающиеся к точке a. Им соответствуют значения функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, ..., которые постепенно приближаются к точке b.

Определение предела (в терминах последовательностей, по Гейне)

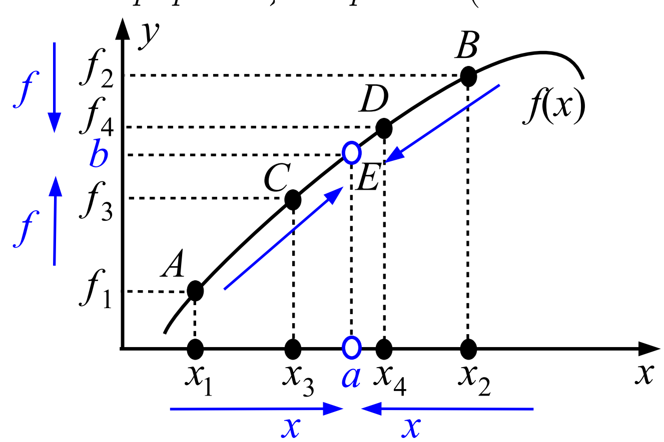
Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a, если любой такой последовательности значений переменной $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in N \ x_n \neq a,$$

соответствует последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Геометрическая интерпретация предела (a и b – конечные числа):



Если b – конечное число, то предел называется **конечным**.

Если b – бесконечное число, то предел называется **бесконечным**.

Если a – конечное число, то предел называется **двусторонним**.

Определение предела (в терминах окрестностей, по Коши)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a, если

$$\forall U(b,\varepsilon)\ \exists \mathring{U}(a,\delta)\ \forall x \in \mathring{U}(a,\delta)\colon\ f(x) \in U(b,\varepsilon).$$

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b,\varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - для любой точки x из этой окрестности

: - выполняется

$f(x) \in U(b,\varepsilon)$ - значение функции f в точке x принадлежит ε-окрестности точки b

Определение предела (в терминах неравенств для конечных точек, на языке $\varepsilon - \delta$)

Конечная точка b называется **пределом** функции $f(x)$ в конечной точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, 0 < |x-a| < \delta\colon |f(x)-b| < \varepsilon$$

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого действительного числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x-a| < \delta$ - $|x-a|$ больше нуля и меньше δ

: - выполняется

$|f(x)-b| < \varepsilon$ - $|f(x)-b|$ меньше ε

Арифметические свойства конечных пределов

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, где b и c - конечные числа, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$,

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$,

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = b/c$, если $c \neq 0$.

4 Односторонние пределы

Определение предела (в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** в конечной точке a, если любой такой последовательности значений переменной $\{x_n\}$, что
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in N\ x_n < a,$$
соответствует последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b.

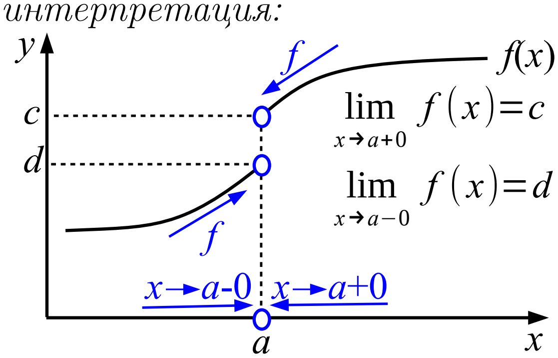
Обозначение: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.

Определение предела (в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** в конечной точке a, если любой такой последовательности значений переменной $\{x_n\}$, что
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in N\ x_n > a,$$
соответствует последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

Геометрическая интерпретация:



Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)

Функция $f(x)$ имеет в точке a двусторонний предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы и они равны, причем их общее значение является значением двустороннего предела.