Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если

$$\exists b > 0 \ \forall n \in N\colon |x_n| \le b.$$

Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если

$$\exists b \in R\ \forall n \in N\colon x_n \leq b.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если

$$\exists b \in R \ \forall n \in N\colon x_n \le b.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если

$$\exists b \in R \ \forall n \in N\colon x_n \ge b.$$

Условия сходимости последовательности

*Теорема (необходимое условие сходимости)**

*Теорема (необходимое условие сходимости)**
Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

Условия сходимости последовательности

Доказательство

Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon) \colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$.

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. При таком выборе ε из определния предела получаем, что

$$\exists n_1\ \forall n > n_1\colon |x_n - a| < 1,$$

Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. При таком выборе ε из определния предела получаем, что

$$\exists n_1\ \forall n > n_1\colon |x_n - a| < 1,$$

где n_1 - это $n(\varepsilon)$, вычисленное для $\varepsilon = 1$.

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда

$$|x_1 - a| \le d,\ |x_2 - a| \le d,\ \ldots,\ |x_{n_1} - a| \le d$$

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда

$$|x_1 - a| \leq d,\ |x_2 - a| \leq d,\ \ldots,\ |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1\colon\ |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$. Тогда

$$|x_1 - a| \le d,\ |x_2 - a| \le d,\ \ldots,\ |x_{n_1} - a| \le d$$

и

$$\forall n > n_1 \colon |x_n - a| < 1 \le d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N \colon |x_n - a| \le d.$$

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда

$$|x_1 - a| \leq d,\ |x_2 - a| \leq d,\ \ldots,\ |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1\colon |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N\colon |x_n - a| \leq d.$$

$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d$

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда

$$|x_1 - a| \le d,\ |x_2 - a| \le d,\ \ldots,\ |x_{n_1} - a| \le d$$

и

$$\forall n > n_1\colon\ |x_n - a| < 1 \le d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N\colon\ |x_n - a| \le d.$$

$\Rightarrow -d \le x_n - a \le d \Rightarrow a - d \le x_n \le a + d$

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|\}$. Тогда

$$|x_1 - a| \leq d,\ |x_2 - a| \leq d,\ \dots,\ |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1 \colon |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N \colon |x_n - a| \leq d.$$

$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d \Rightarrow a - d \leq x_n \leq a + d$

$\Rightarrow$ последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ■

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если

$$\forall n \in N\colon x_n \leq x_{n+1}.$$

Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если

$$\forall n \in N\colon\ x_n \le x_{n+1}.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если

$$\forall n \in N\colon\ x_n \ge x_{n+1}.$$

Определение

Возрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

*Теорема (достаточное условие сходимости,
теорема Вейерштрасса)*

Условия сходимости последовательности

Теорема (достаточное условие сходимости,
теорема Вейерштрасса)

Всякая возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет конечный предел.

Условия сходимости последовательности

Пример:

Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

Условия сходимости последовательности

Пример:

$x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$,

$\forall n \;\; x_n < 1$

(ограниченность),

Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n \;\; x_n < 1$

(ограниченность),

$\forall n \;\; x_n < x_{n+1}$

(возрастание),

Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n \;\; x_n < 1$

(ограниченность),

$\forall n \;\; x_n < x_{n+1}$

(возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Условия сходимости последовательности

Пример:

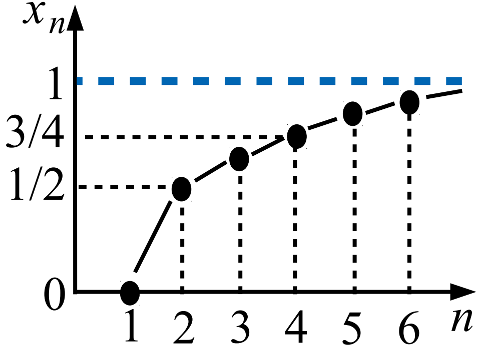
$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n \;\; x_n < 1$ (ограниченность),

$\forall n \;\; x_n < x_{n+1}$ (возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n.$$



Бесконечный предел

Бесконечный предел

Определение

Бесконечное число ∞ называется **бесконечным пределом последовательности** $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |x_n| > \varepsilon.$$

Бесконечный предел

Определение

Бесконечное число ∞ называется **бесконечным пределом последовательности** $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| > \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$.

Бесконечный предел

Частные случаи:

Бесконечный предел

Частные случаи:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

Бесконечный предел

Частные случаи:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$$

Бесконечный предел

Частные случаи:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon x_n > \varepsilon$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

Бесконечный предел

Частные случаи:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n < -\varepsilon$$

Бесконечный предел

Примеры:

Бесконечный предел

Примеры:

Частные случаи

Бесконечный предел

Примеры:

Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

Бесконечный предел

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

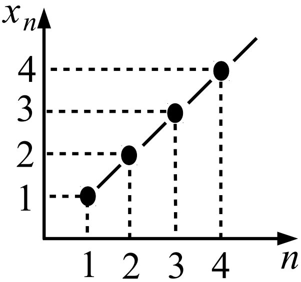
$$x_n = n$$

Примеры:

Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$

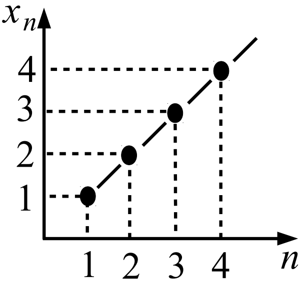


Примеры:

Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$

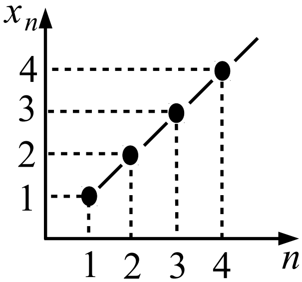


$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

$$x_n = n \qquad x_n = -n$$

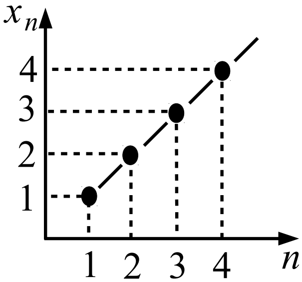


Примеры:

Частные случаи

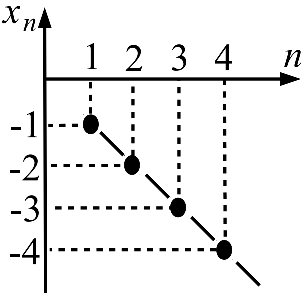
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$



$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

$$x_n = -n$$



Бесконечный предел

Примеры: Общий случай

Бесконечный предел

Примеры:

Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

Бесконечный предел

Примеры: Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$

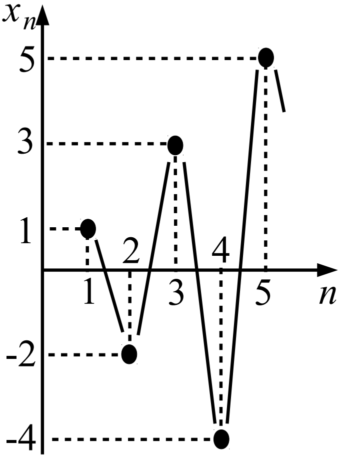
Бесконечный предел

Примеры:

Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$



Бесконечный предел

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности.

Бесконечный предел

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак "$+$", если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности,

Бесконечный предел

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак "$+$", если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак "$-$", если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности.

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак “$+$”, если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак “$-$”, если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности. Если направление движения однозначно определить нельзя, то знак перед ∞ не ставится.

Замечание

Замечание

Для любой числовой последовательности может реализоваться *только один* из трех исходов:

Замечание

Для любой числовой последовательности может реализоваться *только один* из трех исходов:

1) последовательность не имеет предела,

Замечание

Для любой числовой последовательности может реализоваться *только один* из трех исходов:

1) последовательность не имеет предела,

2) последовательность имеет конечный предел,

Замечание

Для любой числовой последовательности может реализоваться *только один* из трех исходов:

1) последовательность не имеет предела,
2) последовательность имеет конечный предел,
3) последовательность имеет бесконечный предел.

Бесконечно большая и малая последовательности

Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей:

Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то

$$\{x_n + y_n\} \text{ - бесконечно малая,}$$

Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то

$\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая,

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то

$\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая,

Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то

$$\{x_n + y_n\} \text{ - бесконечно малая,}$$

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то

$$\{x_n \cdot y_n\} \text{ - бесконечно малая,}$$

3) если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\{y_n\}$ - ограниченная, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая.

Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая,

то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.

Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая,
   то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.
2. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall \boldsymbol{n}$: $x_n \neq 0$,
   то $\{1/x_n\}$ - бесконечно большая.

Бесконечно большая и малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Бесконечно большая и малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Примеры:

Бесконечно большая и малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Примеры:

$\{n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$\{1/n\}$ - бесконечно малая, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теоремы о конечных и бесконечных пределах

В этих теоремах под пределами понимаются как конечный, так и определенного знака бесконечный пределы, т.е. либо число, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Случай, когда предел равен ∞, не рассматривается.

Теорема (единственность предела)

Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теорема (единственность предела)
Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{R}$ может иметь на этой прямой только один предел.

Теорема (предельный переход в неравенствах)

Теорема (предельный переход в неравенствах)
Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a \in \overline{R}$, и $\forall n : x_n \le y_n \le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Число e

Число e определяется как предел числовой последовательности

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Число e

Число e определяется как предел числовой последовательности

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Число e

Число e определяется как предел числовой последовательности

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Приближенные оценки дают, что

$$e \approx 2.718281828459045.$$

Число e определяется как предел числовой последовательности

$$e = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что

$$e \approx 2.718281828459045.$$

В приближенных вычислениях обычно полагают

$$e \approx 2.72.$$

Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$

Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$.

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. Также через e определяются гиперболические функции.

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Число e

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

4) гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Экономическое приложение:

Число e

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов.

Число e

Экономическое приложение:
В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов.
Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r.

Число e

Экономическое приложение:
В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r. По условиям вклада начисление процентов и их капитализация происходит n раз в год.

Экономическое приложение:

Тогда через m лет размер вклада составит

$$K_n = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Экономическое приложение:

Тогда через m лет размер вклада составит

$$K_n = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Соответственно, при непрерывном начислении процентов и их капитализации мы будем иметь

$$K = \lim_{n \to \infty} K_n = \lim_{n \to \infty} S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n} = S \cdot e^{rm/100}$$