Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Математический анализ

Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.2

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Принцип вложенных отрезков

Принцип вложенных отрезков

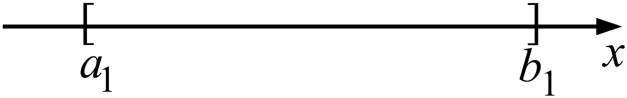
Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …, $[a_n, b_n]$, …

Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...

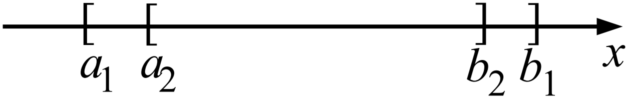
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …, $[a_n, b_n]$, …



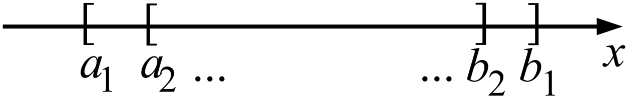
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...



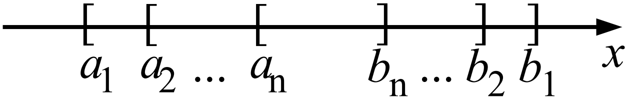
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …, $[a_n, b_n]$, …



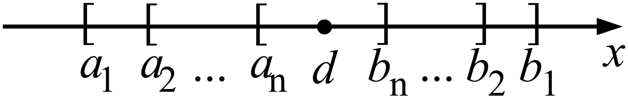
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …, $[a_n, b_n]$, …



Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …, $[a_n, b_n]$, …



Принцип вложенных отрезков

Определение

Система отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... называется **системой вложенных отрезков**, если

$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$.

Принцип вложенных отрезков

Определение

Говорят, что **длина вложенных отрезков стремится к нулю**, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |b_n - a_n| < \varepsilon.$

Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall\varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n, зависящее от ε, такое что

Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall\varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \boldsymbol{n}(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число $\boldsymbol{n}$, зависящее от ε, такое что

$\forall \boldsymbol{n} > \boldsymbol{n}(\varepsilon)$ - для любого натурального числа $\boldsymbol{n}$, превосходящего $\boldsymbol{n}(\varepsilon)$

Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n,

зависящее от ε, такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n,

превосходящего $n(\varepsilon)$

: - выполняется

Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n,

зависящее от ε, такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n,

превосходящего $n(\varepsilon)$

: - выполняется

$|b_n - a_n| < \varepsilon$ - модуль разности b_n и a_n меньше ε

Принцип вложенных отрезков

Теорема (принцип вложенных отрезков)

Принцип вложенных отрезков

Теорема (принцип вложенных отрезков)
Для всякой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, ...$ с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка d, которая принадлежит всем отрезкам системы, причем $d = sup\{a_n\} = inf\{b_n\}$.

Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел.

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел.

Обозначение: $y = f(x)$

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел.

Обозначение: $y = f(x)$

x - независимая переменная

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел.

Обозначение: $y = f(x)$

x - независимая переменная

y - зависимая переменная

Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел.

Обозначение: $y = f(x)$

x - независимая переменная

y - зависимая переменная

$X = D(f)$ - область определения

Определение

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x, f(x))$, где $x \in X$.

Определение

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция, ставящая в соответствие каждому числу y соответствующее значение x, называется **функцией, обратной данной**, или **обратной функцией**.

Определение

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция, ставящая в соответствие каждому числу y соответствующее значение x, называется **функцией, обратной данной**, или **обратной функцией**.

Обозначение: $x = f^{-1}(y)$

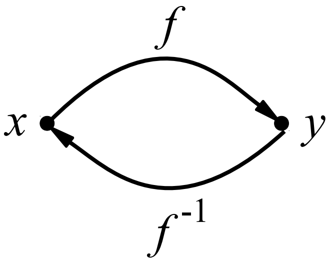
Числовая функция

$$x\ \bullet \qquad\qquad\qquad \bullet\ y$$

Числовая функция

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left, "f"] & & y \end{tikzcd}$$

Числовая функция

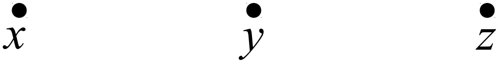


Определение
Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$. Функция $z = g(f(x))$ называется **сложной функцией** или **композицией функций** или **суперпозицией функций** f и g.

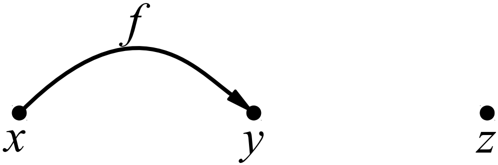
Определение

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$.
Функция $z = g(f(x))$ называется **сложной функцией** или **композицией функций** или **суперпозицией функций** f и g.
Обозначение: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Числовая функция



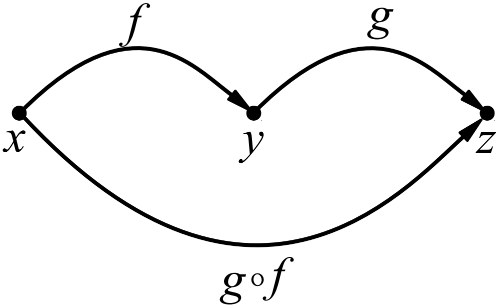
Числовая функция



Числовая функция

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

Числовая функция



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

К основным элементарным функциям относятся:

1) $y = x^{\alpha}$ - степенная функция

К основным элементарным функциям относятся:

1) $y = x^{\alpha}$ - степенная функция

2) $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ - показательная функция

Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

1) $y = x^{\alpha}$ - степенная функция

2) $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ - показательная функция

3) $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ - логарифмическая функция

Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ - тригонометрические функции

К основным элементарным функциям относятся:

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ - тригонометрические функции

5) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ - обратные тригонометрические функции

Определение

Функция называется **элементарной**, если она задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.

Определение

Функция называется **элементарной**, если она задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.

Примеры:
$$y = 2x^2 + 3x + 5,$$
$$y = sin(2^x),$$
$$y = \operatorname{tg}\sqrt{x^3 + x^2}.$$

Пример функции, которая не является элементарной:

$$y = \begin{cases} x, & x \le 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$$

Классификация элементарных функций:

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$

Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - полиномы,

Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - полиномы,

3) иррациональная функция

Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - полиномы,

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - полиномы,

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности

$y = x + \sqrt[3]{x}$,

Классификация элементарных функций:

4) трансцендентная функция

Классификация элементарных функций:

4) трансцендентная функция - это функция, содержащая в себе различные тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.

Классификация элементарных функций:
4) трансцендентная функция - это функция, содержащая в себе различные тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.
$y = x + \sqrt{x} + \sin x$.

Числовая последовательность

Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**.

Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, …

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, ...

Произношение: $\{a_n\}$ - числовая последовательность с общим членом a_n.

Определение

Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Определение

Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Примеры:

Определение
Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Примеры: $a_n = 1/2^n$, $a_n = (-1)^n \cdot n^3$.

Экономический пример:

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год.

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность

Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, *Экономический пример:* Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1.1$, *Экономический пример:* Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1.1$, $a_3 = 10 \cdot 1.1^2$, *Экономический пример:* Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1.1$, $a_3 = 10 \cdot 1.1^2$, ..., *Экономический пример:* Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1.1$, $a_3 = 10 \cdot 1.1^2$, ...,$a_n = 10 \cdot 1.1^{n-1}$, *Экономический пример:* Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1.1$, $a_3 = 10 \cdot 1.1^2$, ...,$a_n = 10 \cdot 1.1^{n-1}$, ...,

Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1.1$, $a_3 = 10 \cdot 1.1^2$, $\dots$,$a_n = 10 \cdot 1.1^{n-1}$, $\dots$, где a_n - размер вклада в течение n-ого года.

Конечный предел

Определение

Конечное число a называется **конечным пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Определение

Конечное число a называется **конечным пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

Определение

Конечное число a называется **конечным пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

Здесь a - конечное число, т.е. $a \neq \pm\infty$.

Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon$$

Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1$$

Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1$$

$$\forall n > 1\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$n(\varepsilon) = 1$ $\qquad\qquad$ $n(\varepsilon/2) = 2$

$\forall n > 1\colon |a_n - a| < \varepsilon$

Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1 \qquad\qquad n(\varepsilon/2) = 2$$

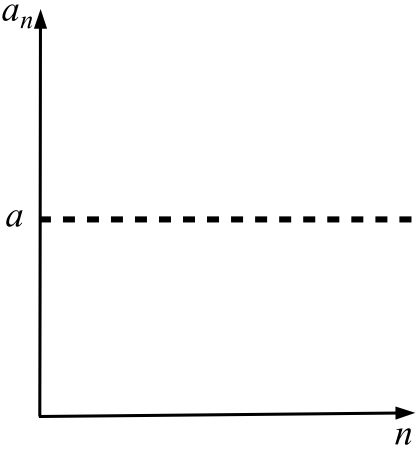
$$\forall n > 1 \colon |a_n - a| < \varepsilon \qquad\qquad \forall n > 2 \colon |a_n - a| < \varepsilon/2$$

Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1 \qquad\qquad n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1\colon |a_n - a| < \varepsilon \qquad\qquad \forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2$$

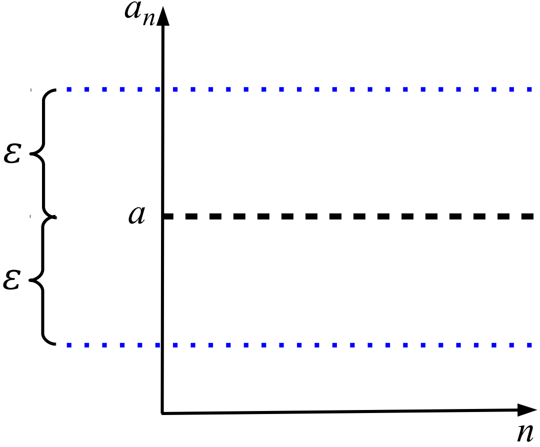


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1 \qquad\qquad n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1\colon |a_n - a| < \varepsilon \qquad\qquad \forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2$$

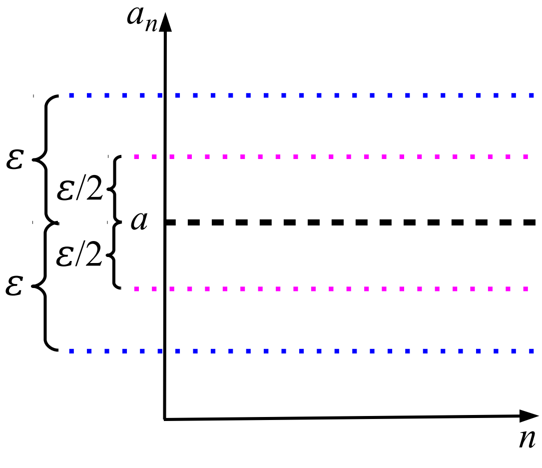


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1 \qquad\qquad n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1\colon |a_n - a| < \varepsilon \qquad\qquad \forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2$$

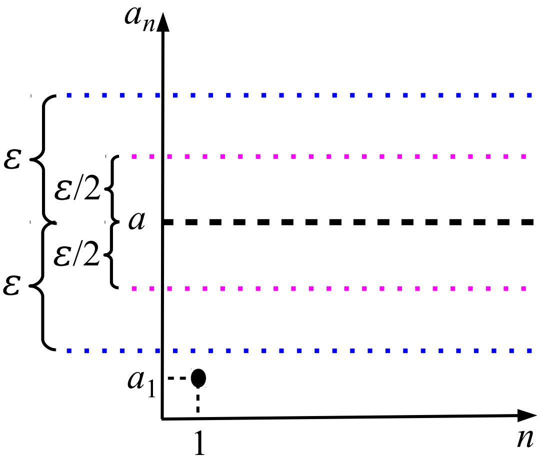


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1 \qquad\qquad n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1\colon |a_n - a| < \varepsilon \qquad\qquad \forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2$$

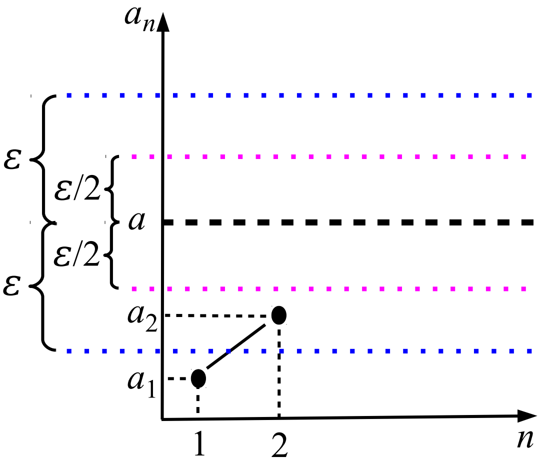


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1 \qquad\qquad n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1\colon |a_n - a| < \varepsilon \qquad\qquad \forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2$$

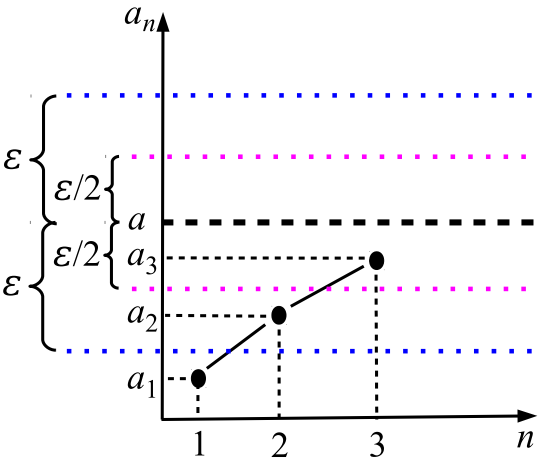


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1 \qquad\qquad n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1\colon |a_n - a| < \varepsilon \qquad\qquad \forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2$$

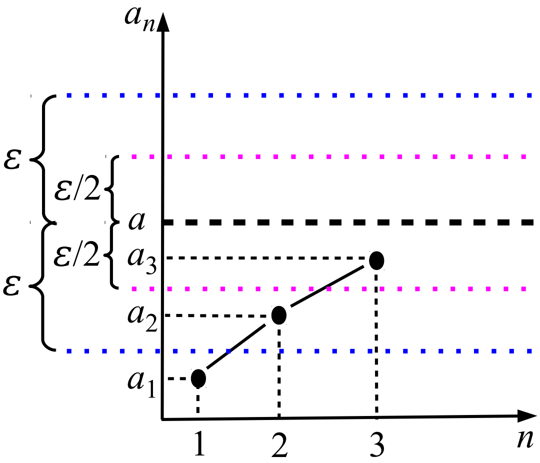


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$n(\varepsilon) = 1$ $\qquad$ $n(\varepsilon/2) = 2$

$> 1\colon |a_n - a| < \varepsilon$ $\qquad$ $\forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2$

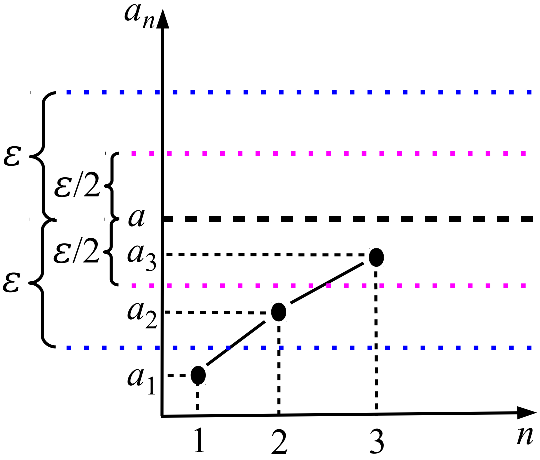


Конечный предел

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$= 1$ $\qquad n(\varepsilon/2) = 2$

$- a| < \varepsilon$ $\qquad \forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2$

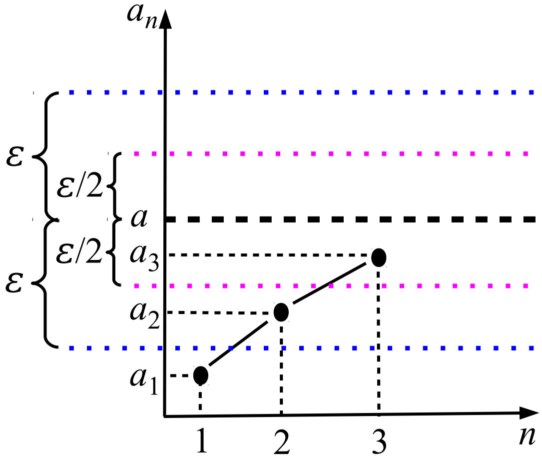


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2$$

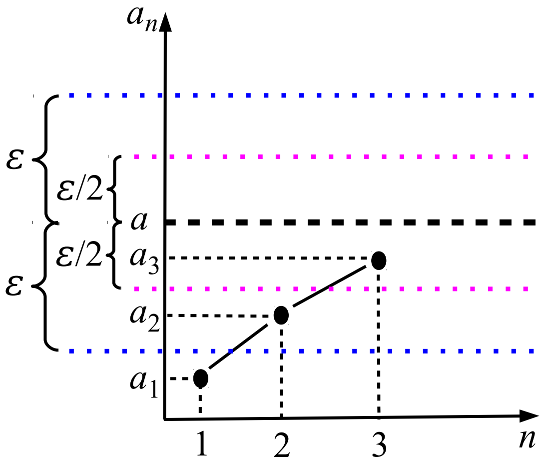


Конечный предел

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$n(\varepsilon/2) = 2$ $\qquad\qquad$ $n(\varepsilon/4) = 3$

$\forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2$

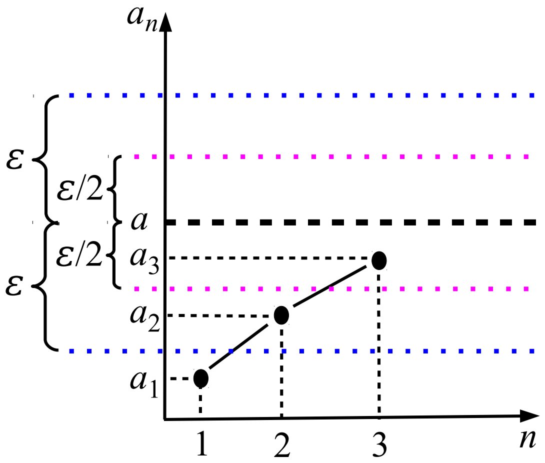


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$n(\varepsilon/2) = 2$ $\qquad$ $n(\varepsilon/4) = 3$

$\forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2$ $\qquad$ $\forall n > 3\colon |a_n - a| < \varepsilon/4$

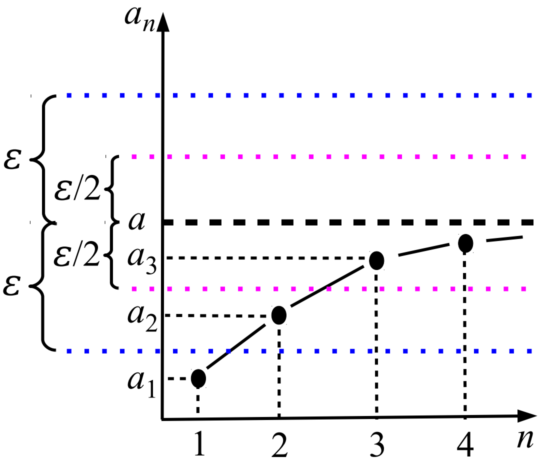


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2 \qquad\qquad n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2 \qquad\qquad \forall n > 3\colon |a_n - a| < \varepsilon/4$$

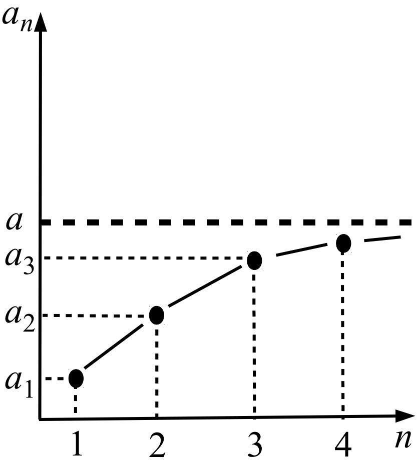


Конечный предел

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2 \qquad\qquad n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2 \qquad\qquad \forall n > 3\colon |a_n - a| < \varepsilon/4$$

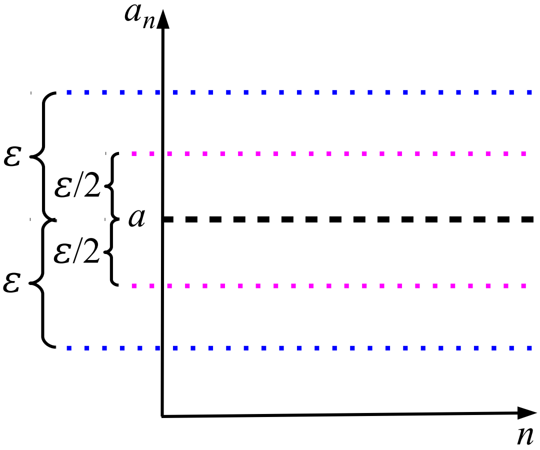


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2 \qquad\qquad n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2 \qquad\qquad \forall n > 3\colon |a_n - a| < \varepsilon/4$$

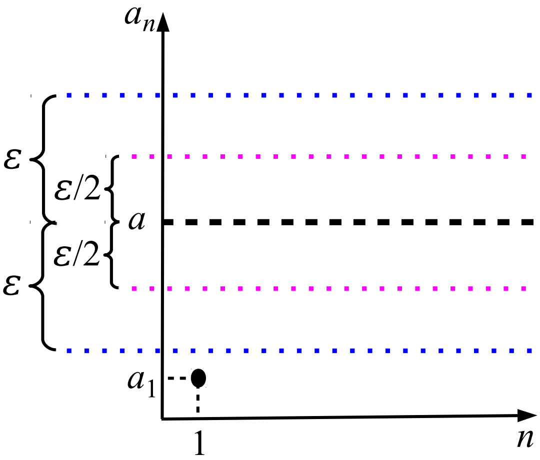


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$n(\varepsilon/2) = 2$ $\qquad$ $n(\varepsilon/4) = 3$

$\forall n > 2 \colon |a_n - a| < \varepsilon/2$ $\qquad$ $\forall n > 3 \colon |a_n - a| < \varepsilon/4$

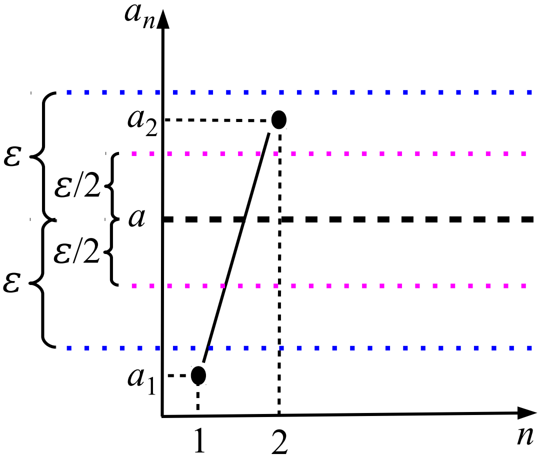


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2 \qquad\qquad n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2 \qquad\qquad \forall n > 3\colon |a_n - a| < \varepsilon/4$$

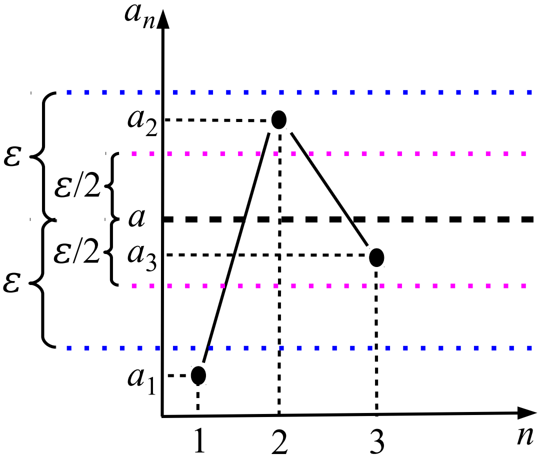


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$n(\varepsilon/2) = 2$ $\qquad$ $n(\varepsilon/4) = 3$

$\forall n > 2 \colon |a_n - a| < \varepsilon/2$ $\qquad$ $\forall n > 3 \colon |a_n - a| < \varepsilon/4$

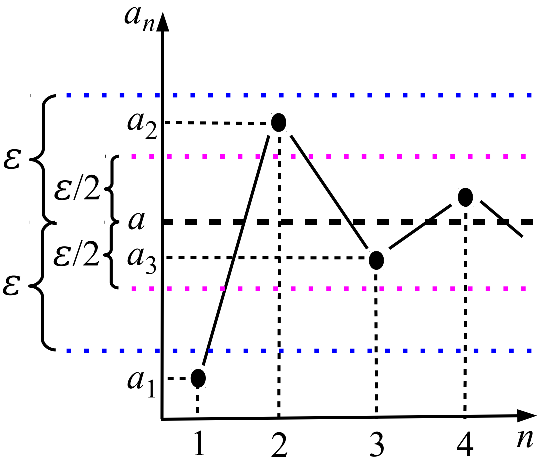


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$n(\varepsilon/2) = 2$ $\qquad$ $n(\varepsilon/4) = 3$

$\forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2$ $\qquad$ $\forall n > 3\colon |a_n - a| < \varepsilon/4$

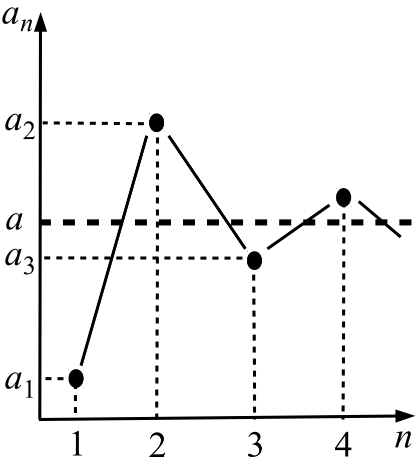


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2 \qquad\qquad n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2\colon |a_n - a| < \varepsilon/2 \qquad\qquad \forall n > 3\colon |a_n - a| < \varepsilon/4$$



Как видно из представленных рисунков, конечный предел a – это число, к которому постепенно приближаются члены числовой последовательности a_n (черные точки на рисунках) по мере увеличения их номера n,

Конечный предел

Как видно из представленных рисунков, конечный предел a – это число, к которому постепенно приближаются члены числовой последовательности a_n (черные точки на рисунках) по мере увеличения их номера n, при этом способ приближения может различаться у разных последовательностей (сравните варианты 1 и 2).

Конечный предел

Определение
Если последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**. В противном случае она называется **расходящейся**.

*Арифметические свойства конечных пределов**

Конечный предел

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где

a и b – конечные числа.

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где a и b – конечные числа.

Тогда

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где a и b – конечные числа.

Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$,

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где

a и b – конечные числа.

Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$,

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где

a и b – конечные числа.

Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$,

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где a и b – конечные числа.

Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n) = a/b$, если $b \neq 0$.

Доказательство свойства 1

Доказательство свойства 1

Дано:

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Конечный предел

Доказательство свойства 1

Дано: $$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Конечный предел

Доказательство свойства 1

Дано: $$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Доказать:

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$

По определению предела имеем:

Конечный предел

По определению предела имеем:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

По определению предела имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_1(\varepsilon) \colon |x_n - a| < \varepsilon$$

Конечный предел

По определению предела имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_1(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_1(\varepsilon) \colon |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Конечный предел

По определению предела имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_1(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_1(\varepsilon)\colon\ |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_2(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_2(\varepsilon)\colon\ |y_n - b| < \varepsilon$$

Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.

Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.
Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ и } |y_n - b| < \varepsilon,$$

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.
Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ и } |y_n - b| < \varepsilon,$$

из которых следует

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.
Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ и } |y_n - b| < \varepsilon,$$

из которых следует

$$|x_n + y_n - (a + b)|$$

Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.
Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ и } |y_n - b| < \varepsilon,$$

из которых следует

$$|x_n + y_n - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b|$$

Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.
Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ и } |y_n - b| < \varepsilon,$$

из которых следует

$$|x_n + y_n - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.
Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ и } |y_n - b| < \varepsilon,$$

из которых следует

$$|x_n + y_n - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon + \varepsilon$$

Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.
Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ и } |y_n - b| < \varepsilon,$$

из которых следует

$$|x_n + y_n - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Таким образом, получается

Таким образом, получается
$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$:

$$|x_n + y_n - (a + b)| < 2\varepsilon.$$

Таким образом, получается
$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$:

$$\left|x_n + y_n - (a+b)\right| < 2\varepsilon.$$

Это означает согласно определению предела

Таким образом, получается

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon):$$

$$|x_n + y_n - (a + b)| < 2\varepsilon.$$

Это означает согласно определению предела

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b. \blacksquare$$