Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Логические символы

Логические символы

1. $\forall$ – любой, для любого

Логические символы

1. $\forall$ – любой, для любого

$\forall x > 0$

Логические символы

1. $\forall$ – любой, для любого

$\forall x > 0$ – любое положительное число x.

Логические символы

1. $\forall$ – любой, для любого

$\forall x > 0$ – любое положительное число x.

2. $\exists$ – существует

Логические символы

1. $\forall$ – любой, для любого

$\forall x > 0$ – любое положительное число x.

2. $\exists$ – существует

$\exists x > 1$

Логические символы

1. $\forall$ – любой, для любого

$\forall x > 0$ – любое положительное число x.

2. $\exists$ – существует

$\exists x > 1$ – существует число x, большее одного.

Логические символы

1. $\forall$ – любой, для любого

$\forall x > 0$ – любое положительное число x.

2. $\exists$ – существует

$\exists x > 1$ – существует число x, большее одного.

3. $\Rightarrow$ – следует, следовательно, тогда, то

Логические символы

1. $\forall$ – любой, для любого

$\forall x > 0$ – любое положительное число x.

2. $\exists$ – существует

$\exists x > 1$ – существует число x, большее одного.

3. $\Rightarrow$ – следует, следовательно, тогда, то

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

Логические символы

1. $\forall$ – любой, для любого

$\forall x > 0$ – любое положительное число x.

2. $\exists$ – существует

$\exists x > 1$ – существует число x, большее одного.

3. $\Rightarrow$ – следует, следовательно, тогда, то

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ – если $x = 2$, то $x^2 = 4$.

Логические символы

4. $\Leftrightarrow$ – равносильно, эквивалентно,
тогда и только тогда

Логические символы

4. $\Leftrightarrow$ – равносильно, эквивалентно,
тогда и только тогда

$x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$

Логические символы

4. $\Leftrightarrow$ – равносильно, эквивалентно,
тогда и только тогда

$x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ – неравенство $x + 3 < 0$ эквивалентно неравенству $x < -3$.

Логические символы

4. $\Leftrightarrow$ – равносильно, эквивалентно,
тогда и только тогда

$x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$ – неравенство $x+3<0$ эквивалентно неравенству $x<-3$.

5. $\in$ – принадлежит

Логические символы

4. $\Leftrightarrow$ – равносильно, эквивалентно,
тогда и только тогда

$x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ – неравенство $x + 3 < 0$ эквивалентно неравенству $x < -3$.

5. $\in$ – принадлежит

$x \in A$

Логические символы

4. $\Leftrightarrow$ – равносильно, эквивалентно,
тогда и только тогда

$x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$ – неравенство $x+3<0$ эквивалентно неравенству $x<-3$.

5. $\in$ – принадлежит

$x \in A$ – число x принадлежит множеству A,

Логические символы

4. $\Leftrightarrow$ – равносильно, эквивалентно,
тогда и только тогда

$x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ – неравенство $x + 3 < 0$
эквивалентно неравенству $x < -3$.

5. $\in$ – принадлежит

$x \in A$ – число x принадлежит множеству A,

$1 \in \{1, 2, 3\}$

Логические символы

4. $\Leftrightarrow$ – равносильно, эквивалентно,
тогда и только тогда

$x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$ – неравенство $x+3<0$
эквивалентно неравенству $x<-3$.

5. $\in$ – принадлежит

$x \in A$ – число x принадлежит множеству A,

$1 \in \{1,2,3\}$ – число 1 принадлежит множеству,
состоящему из чисел 1, 2 и 3.

Логические символы

6. $\subset$ – включено

Логические символы

6. $\subset$ – включено

$A \subset B$

Логические символы

6. $\subset$ – включено

$A \subset B$ – множество A включено в множество B,

Логические символы

6. $\subset$ – включено

$A \subset B$ – множество A включено в множество B, т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B,

6. $\subset$ – включено

$A \subset B$ – множество A включено в множество B, т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B,

$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

Логические символы

6. $\subset$ – включено

$A \subset B$ – множество A включено в множество B, т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B,

$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ – множество, состоящее из чисел 1 и 2, включено в множество, состоящее из чисел 1, 2 и 3.

Теорема

Теорема

Определение

Математические утверждения, в правильности которых убеждаются путем рассуждений или доказательств, называются **теоремами**.

Теорема

Каждая теорема состоит из двух частей: из **условия** и **заключения**.

Теорема

Каждая теорема состоит из двух частей: из **условия** и **заключения**.

Условие — это то, что дано.

Теорема

Каждая теорема состоит из двух частей: из **условия** и **заключения**.
Условие — это то, что дано.
Заключение — это то, что надо доказать.

Теорема

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием,

Теорема

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**,

Теорема

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**, получившаяся - **обратной**,

Теорема

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**, получившаяся - **обратной**, а обе теоремы вместе - **взаимно обратными**.

Теорема

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**, получившаяся - **обратной**, а обе теоремы вместе - **взаимно обратными**.

Пусть X и Y - некоторые утверждения.

Теорема

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**, получившаяся - **обратной**, а обе теоремы вместе - **взаимно обратными**.

Пусть X и Y - некоторые утверждения. Тогда

Теорема

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**, получившаяся - **обратной**, а обе теоремы вместе - **взаимно обратными**.

Пусть X и Y - некоторые утверждения. Тогда $X \Rightarrow Y$ - прямая теорема,

Теорема

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**, получившаяся - **обратной**, а обе теоремы вместе - **взаимно обратными**.

Пусть X и Y - некоторые утверждения. Тогда
$X \Rightarrow Y$ - прямая теорема,
$Y \Rightarrow X$ - обратная теорема.

Определение

Необходимым условием называется условие, без соблюдения которого данное утверждение не может быть истинным.

Теорема

Определение

Достаточным условием называется такое условие, при выполнении которого данное утверждение является истинным.

Теорема

Пример:

Пример:

Выполнение условия $x = 2$ является достаточным для истинности равенства $x^2 = 4$,

Теорема

Пример:
Выполнение условия $x = 2$ является достаточным для истинности равенства $x^2 = 4$, а выполнение условия $x^2 = 4$ является лишь необходимым для справедливости равенства $x = 2$.

Расширенное множество действительных чисел

Расширенное множество действительных чисел

Основные множества чисел:

Расширенное множество действительных чисел

Основные множества чисел:

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел.

Расширенное множество действительных чисел

Основные множества чисел:

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел.

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел.

Расширенное множество действительных чисел

Основные множества чисел:

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел.

$Z = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$ - множество целых чисел.

Q - множество рациональных чисел.

Расширенное множество действительных чисел

Основные множества чисел:

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел.

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел.

Q - множество рациональных чисел.

Пример: $1/3, 2/5$.

Расширенное множество действительных чисел

Основные множества чисел:

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел.

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел.

Q - множество рациональных чисел.

Пример: $1/3, 2/5$.

I - множество иррациональных чисел.

Расширенное множество действительных чисел

Основные множества чисел:

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел.

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел.

Q - множество рациональных чисел.

Пример: $1/3, 2/5$.

I - множество иррациональных чисел.

Пример: $\sqrt{2}$, π.

Расширенное множество действительных чисел

Основные множества чисел:

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел.

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел.

Q - множество рациональных чисел.

Пример: $1/3, 2/5$.

I - множество иррациональных чисел.

Пример: $\sqrt{2}$, π.

R - множество действительных чисел, представляющее объединение всех рациональных и иррациональных чисел.

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$.

Расширенное множество действительных чисел

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$.Полученное множество называется **расширенным множеством действительных чисел** и обозначается $\overline{R}$.

Расширенное множество действительных чисел

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$. Полученное множество называется **расширенным множеством действительных чисел** и обозначается $\overline{R}$.

$a \in \overline{R} \to a$ - действительное число или $+\infty$ или $-\infty$.

Определение

Элементы $+\infty$ и $-\infty$ называются **бесконечными числами**,

Расширенное множество действительных чисел

Определение

Элементы $+\infty$ и $-\infty$ называются **бесконечными числами**, а действительные числа – **конечными числами**.

Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел:

Свойства бесконечных чисел:

1) $-\infty < +\infty$,

Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел:

1) $-\infty < +\infty$,

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$,

Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел:

1) $-\infty < +\infty$,

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$,

3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$,

Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел:

1) $-\infty < +\infty$,

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$,

3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$,

4) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$,

Свойства бесконечных чисел:

1) $-\infty < +\infty$,

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$,

3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$,

4) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$,

5) $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$.

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства:

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства:

1) $-\infty < a < +\infty$,

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства:

1) $-\infty < a < +\infty$,

2) $a + (+\infty) = +\infty$,

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства:

1) $-\infty < a < +\infty$,

2) $a + (+\infty) = +\infty$,

3) $a + (-\infty) = -\infty$,

Для конечного числа a справедливы свойства:

1) $-\infty < a < +\infty$,

2) $a + (+\infty) = +\infty$,

3) $a + (-\infty) = -\infty$,

4) если $a > 0$, то

$a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$,

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства:

1) $-\infty < a < +\infty$,

2) $a + (+\infty) = +\infty$,

3) $a + (-\infty) = -\infty$,

4) если $a > 0$, то

$a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$,

5) если $a < 0$, то

$a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$.

Расширенное множество действительных чисел

Выражения

$$(+\infty) + (-\infty),\ (+\infty) - (+\infty),$$

Расширенное множество действительных чисел

Выражения

$$(+\infty)+(-\infty),\ (+\infty)-(+\infty),$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ (\pm\infty)\cdot 0,\ 1^{\pm\infty}$$

Выражения

$$(+\infty) + (-\infty),\ (+\infty) - (+\infty),$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ (\pm\infty)\cdot 0,\ 1^{\pm\infty}$$

неопределены и называются **неопределенностями**.

Выражения

$$(+\infty)+(-\infty),\ (+\infty)-(+\infty),$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ (\pm\infty)\cdot 0,\ 1^{\pm\infty}$$

неопределены и называются **неопределенностями**.

Если знак бесконечного числа неизвестен, то это число называется **бесконечностью без знака** и обозначается ∞.

Числовое множество – это некоторый набор чисел.

Числовое множество – это некоторый набор чисел. Например, $\{1, 3, 5\}$ – числовое множество, состоящее из трех чисел 1, 3, 5.

Числовое множество – это некоторый набор чисел. Например, $\{1, 3, 5\}$ – числовое множество, состоящее из трех чисел 1, 3, 5.

Частным случаем числового множества является **промежуток**.

Выделяют следующие *типы промежутков*:

Числовые множества и их свойства

Выделяют следующие *типы промежутков*:

1) отрезок $[a, b]$

Числовые множества и их свойства

Выделяют следующие *типы промежутков*:

1) отрезок $[a, b]$

– это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$,

Числовые множества и их свойства

Выделяют следующие *типы промежутков*:

1) отрезок $[a, b]$

– это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$,

2) интервал (a, b)

Числовые множества и их свойства

Выделяют следующие *типы промежутков*:

1) отрезок $[a, b]$

– это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$,

2) интервал (a, b)

– это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$,

Выделяют следующие *типы промежутков*:

3) полуинтервал $[a, b)$

Выделяют следующие *типы промежутков*:
3) полуинтервал $[a, b)$
– это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x < b$,

Выделяют следующие *типы промежутков*:
3) полуинтервал $[a, b)$
– это множество действительных чисел x,
удовлетворяющих неравенству $a \leq x < b$,
4) полуинтервал $(a, b]$

Выделяют следующие *типы промежутков*:
3) полуинтервал $[a, b)$
– это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x < b$,
4) полуинтервал $(a, b]$
– это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x \leq b$.

Определение

Числовое множество E называется **ограниченным сверху**, если

$$\exists b \in R \; \forall x \in E \colon x \leq b.$$

Определение

Числовое множество E называется **ограниченным сверху**, если

$$\exists b \in R \ \forall x \in E\colon x \le b.$$

Определение

Числовое множество E называется **ограниченным снизу**, если

$$\exists b \in R \ \forall x \in E\colon x \ge b.$$

Расшифровка математических символов:

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E

: - выполняется

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E

: - выполняется

$x \leq b$ - число x меньше или равно b

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E

: - выполняется

$x \leq b$ - число x меньше или равно b

$x \geq b$ - число x больше или равно b

Определение

Числовое множество E называется **неограниченным сверху**, если

$$\forall b \in R \ \exists x \in E \colon x > b.$$

Определение

Числовое множество E называется **неограниченным сверху**, если

$$\forall b \in R \ \exists x \in E \colon x > b.$$

Определение

Числовое множество E называется **неограниченным снизу**, если

$$\forall b \in R \ \exists x \in E \colon x < b.$$

Расшифровка математических символов:

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

$\exists x \in E$ - существуе такое число x

из множества E, что

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

$\exists x \in E$ - существуе такое число x

из множества E, что

: - выполняется

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

$\exists x \in E$ - существуе такое число x

из множества E, что

: - выполняется

$x > b$ - число x больше b

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

$\exists x \in E$ - существуе такое число x

из множества E, что

: - выполняется

$x > b$ - число x больше b

$x < b$ - число x меньше b

Определение

Числовое множество E называется **ограниченным**, если

$$\exists b > 0 \; \forall x \in E \colon |x| \le b.$$

Примеры:

Примеры:

1) $(-\infty, 3]$ - числовое множество, ограниченое сверху, но неограниченое снизу,

Примеры:

1) $(-\infty, 3]$ - числовое множество, ограниченое сверху, но неограниченое снизу,

2) $(5, +\infty)$ - числовое множество, ограниченое снизу, но неограниченое сверху,

Примеры:

1) $(-\infty, 3]$ - числовое множество, ограниченое сверху, но неограниченое снизу,

2) $(5, +\infty)$ - числовое множество, ограниченое снизу, но неограниченое сверху,

3) $[-3, 2]$ - ограниченное числовое множество.

Определение

Наименьшее из всех чисел, ограничивающих множество E сверху, называется его **точной верхней гранью** и обозначается $supE$ (читается "супремум E").

Определение
Наибольшее среди всех чисел, ограничивающих множество E снизу, называется его **точной нижней гранью** и обозначается $infE$ (читается "инфимум E").

Примеры:

Примеры:

$\mathit{sup}[-3, 2] = 2,$

Примеры:

$sup[-3,2]=2$,

$inf[-3,2]=-3$,

Примеры:

$sup[-3, 2] = 2,$

$inf[-3, 2] = -3,$

$sup(-3, 2) = 2,$

Примеры:

$sup[-3,2] = 2,$

$inf[-3,2] = -3,$

$sup(-3,2) = 2,$

$inf(-3,2) = -3.$