Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей
Лекция 1.3

Аннотация

Условия сходимости числовой последовательности. Бесконечный предел числовой последовательности. Бесконечно большая последовательность. Бесконечно малая последовательность. Теоремы о конечных и бесконечных пределах. Число e и гиперболические функции.

1 Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если

$$\exists b > 0 \; \forall n \in N\colon |x_n| \leq b.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если

$$\exists b \in R \; \forall n \in N\colon x_n \leq b.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если

$$\exists b \in R \; \forall n \in N\colon x_n \geq b.$$

*Теорема (необходимое условие сходимости)**

Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда по определению предела имеем: $\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n - a| < \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon = 1$. При таком выборе ε из определния предела получаем, что $\exists n_1\ \forall n > n_1$: $|x_n - a| < 1$, где n_1 - это $n(\varepsilon)$, вычисленное для $\varepsilon = 1$.

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, ..., |x_{n_1} - a|\}$.

Тогда

$$|x_1 - a| \le d,\ |x_2 - a| \le d,\ ...,\ |x_{n_1} - a| \le d$$

и

$$\forall n > n_1\colon |x_n - a| < 1 \le d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N\colon |x_n - a| \le d.$$

$\Rightarrow -d \le x_n - a \le d$,

$\Rightarrow a - d \le x_n \le a + d$,

$\Rightarrow$ последовательность $\{x_n\}$ ограничена. $\blacksquare$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если

$$\forall n \in N\colon x_n \le x_{n+1}.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если

$$\forall n \in N\colon x_n \ge x_{n+1}.$$

Определение

Возрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Теорема (достаточное условие сходимости, теорема Вейерштрасса)

Всякая возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет конечный предел.

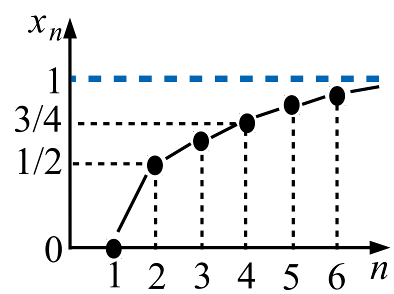
Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n\ x_n < 1$ (ограниченность),
$\forall n\ x_n < x_{n+1}$ (возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n.$$



2 Бесконечный предел

Определение

Бесконечное число ∞ называется **бесконечным пределом последовательности** $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| > \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Частные случаи:

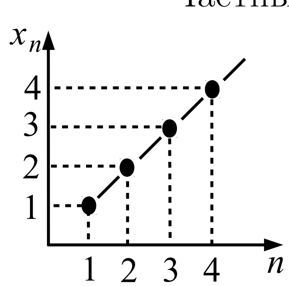
1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n > \varepsilon$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n < -\varepsilon$

Примеры:

Частные случаи

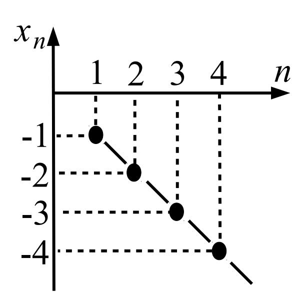
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

$x_n = n$



$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

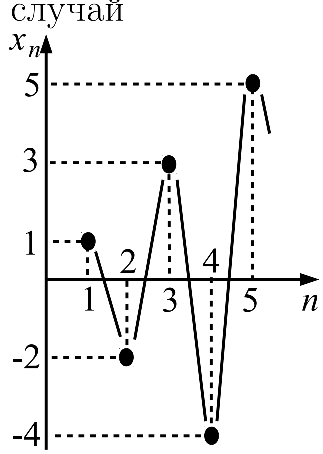
$x_n = -n$



Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$



Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак “$+$”, если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак “$-$”, если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности. Если направление движения однозначно определить нельзя, то знак перед ∞ не ставится.

Замечание

Для любой числовой последовательности может реализоваться *только один* из трех исходов:

1) последовательность не имеет предела,
2) последовательность имеет конечный предел,
3) последовательность имеет бесконечный предел.

3 Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая,

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая,

3) если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\{y_n\}$ - ограниченная, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая.

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.

2. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall n$: $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно большая.

Символически это можно записать в виде:
$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Примеры:

$\{n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$\{1/n\}$ - бесконечно малая, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

4 Теоремы о конечных и бесконечных пределах

В этих теоремах под пределами понимаются как конечный, так и определенного знака бесконечный пределы, т.е. либо число, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Случай, когда предел равен ∞, не рассматривается.

Теорема (единственность предела)

Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{R}$ может иметь на этой прямой только один предел.

Теорема (предельный переход в неравенствах)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a \in \overline{R}$, и $\forall n : x_n \leq y_n \leq z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

5 Число e

Число e определяется как предел числовой последовательности

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$. В приближенных вычислениях обычно полагают $e \approx 2.72$.

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. Также через e определяются гиперболические функции:

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

4) гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r. По условиям вклада начисление процентов и их капитализация происходит n раз в год. Тогда через m лет размер вклада составит

$$K_n = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Соответственно, при непрерывном начислении процентов и их капитализации мы будем иметь

$$K = \lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n} = S \cdot e^{rm/100}.$$