Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей
Лекция 1.1

Аннотация

Логические символы. Теорема и ее структура. Расширенное множество действительных чисел. Свойства числовых множеств и типы промежутков.

1 Логические символы

1. $\forall$ – любой, для любого
   $\forall x > 0$ – любое положительное число x.
2. $\exists$ – существует
   $\exists x > 1$ – существует число x, большее одного.
3. $\Rightarrow$ – следует, следовательно, тогда, то
   $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ – если $x = 2$, то $x^2 = 4$.
4. $\Leftrightarrow$ – равносильно, эквивалентно, тогда и только тогда
   $x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ – неравенство $x + 3 < 0$ эквивалентно неравенству $x < -3$.
5. $\in$ – принадлежит
   $x \in A$ – число x принадлежит множеству A,
   $1 \in \{1, 2, 3\}$ – число 1 принадлежит множеству, состоящему из чисел 1, 2 и 3.
6. $\subset$ – включено
   $A \subset B$ – множество A включено в множество B, т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B,
   $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ – множество, состоящее из чисел 1 и 2, включено в множество, состоящее из чисел 1, 2 и 3.

2 Теорема

Определение

Математические утверждения, в правильности которых убеждаются путем рассуждений или доказательств, называются **теоремами**.

Каждая теорема состоит из двух частей: из условия и заключения. Условие обыкновенно начинается со слова “если”, а заключение — со слова “то”. Условие — это то, что дано; заключение — это то, что надо доказать.

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**, получившаяся - **обратной**, а обе теоремы вместе - **взаимно обратными**.

Пусть X и Y - некоторые утверждения. Тогда
$X \Rightarrow Y$ - прямая теорема,
$Y \Rightarrow X$ - обратная теорема.

Определение

Необходимым условием называется условие, без соблюдения которого данное утверждение не может быть истинным.

Определение

Достаточным условием называется такое условие, при выполнении которого данное утверждение является истинным.

Пример:

Выполнение условия $x = 2$ является достаточным для истинности равенства $x^2 = 4$, а выполнение условия $x^2 = 4$ является лишь необходимым для справедливости равенства $x = 2$.

3 Расширенное множество действительных чисел

Основные множества чисел:

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел.

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел.

Q - множество рациональных чисел. Пример: $1/3, 2/5$.

I - множество иррациональных чисел. Пример: $\sqrt{2}$, π.

R - множество действительных чисел, представляющее объединение всех рациональных и иррациональных чисел.

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$. Полученное множество называется **расширенным множеством действительных чисел** и обозначается $\overline{R}$.

$a \in \overline{R} \to a$ - действительное число или $+\infty$ или $-\infty$.

Определение

Элементы $+\infty$ и $-\infty$ называются **бесконечными числами**, а действительные числа – **конечными числами**.

Свойства бесконечных чисел:

1) $-\infty < +\infty$,
2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$,
3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$,
4) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$,
5) $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$.

Для любого конечного числа a справедливы свойства:

1) $-\infty < a < +\infty$,
2) $a + (+\infty) = +\infty$,
3) $a + (-\infty) = -\infty$,
4) если $a > 0$, то $a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$,
5) если $a < 0$, то $a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$.

Выражения $(+\infty)+(-\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$, $(\pm\infty)\cdot 0$, $1^{\pm\infty}$ неопределены и называются **неопределенностями**.
Если знак бесконечного числа неизвестен, то это число называется **бесконечностью без знака** и обозначается ∞.

4 Числовые множества и их свойства

Числовое множество – это некоторый набор чисел. Например, $\{1,3,5\}$ – числовое множество, состоящее из трех чисел 1, 3, 5.

Частным случаем числового множества является **промежуток**. Выделяют следующие *типы промежутков*:

1) отрезок $[a,b]$ – множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a\le x\le b$,

2) интервал (a,b) – множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a<x<b$,

3) полуинтервал $[a,b)$ – множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a\le x<b$,

4) полуинтервал $(a,b]$ – множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a<x\le b$.

Определение

Числовое множество E называется **ограниченным сверху**, если

$$\exists b\in R\ \forall x\in E\colon x\le b.$$

Определение

Числовое множество E называется **ограниченным снизу**, если

$$\exists b\in R\ \forall x\in E\colon x\ge b.$$

Расшифровка математических символов в определениях:

$\exists b\in R$ - существует такое действительное число b, что

$\forall x\in E$ - для любого числа x из множества E

: - выполняется
$x \leq b$ - число x меньше или равно b
$x \geq b$ - число x больше или равно b

Определение

Числовое множество E называется **неограниченным сверху**, если

$$\forall b \in R \ \exists x \in E\colon x > b.$$

Определение

Числовое множество E называется **неограниченным снизу**, если

$$\forall b \in R \ \exists x \in E\colon x < b.$$

Расшифровка математических символов в определениях:
$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b
$\exists x \in E$ - существуе такое число x из множества E, что
: - выполняется
$x > b$ - число x больше b
$x < b$ - число x меньше b

Определение

Числовое множество E называется **ограниченным**, если

$$\exists b > 0 \ \forall x \in E\colon |x| \leq b.$$

Примеры:

1) $(-\infty, 3]$ - числовое множество, ограниченое сверху, но неограниченое снизу,

2) $(5, +\infty)$ - числовое множество, ограниченое снизу, но неограниченое сверху,

3) $[-3, 2]$ - ограниченное числовое множество.

Определение

Наименьшее из всех чисел, ограничивающих множество E сверху, называется его **точной верхней гранью** и обозначается $supE$ (читается "супремум E").

Определение

Наибольшее среди всех чисел, ограничивающих множество E снизу, называется его **точной нижней гранью** и обозначается $infE$ (читается "инфимум E").

Примеры:

$sup[-3,2]=2$,
$inf[-3,2]=-3$,
$sup(-3,2)=2$,
$inf(-3,2)=-3$.