# Аналитическая геометрия
# Модуль 2
## Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Комплексные числа и многочлены
# Лекция 2.3
## (для ГУИМЦ, 2023)

**Аннотация**

Понятие комплексного числа. Геометрическое изображение комплексных чисел. Формы записи комплексных чисел: алгебраическая, тригонометрическая, показательная. Действия над комплексными числами: сложение, вычитание, деление, возведение в степень, извлечение корня.

# 1 Комплексные числа

Рассмотрим квадратное уравнение

$$z^2 + pz + q = 0$$

с отрицательным дискриминантом $D = p^2 - 4q < 0$. Перепишем его в виде $D = -|D|$ и формально воспользуемся стандартной формулой для корней квадратного уравнения:

$$z_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{-|D|}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{|D|}}{2}.$$

В данной формуле проблема состоит в $\sqrt{-1}$. Такого числа в множестве действительных чисел нет. Введем обозначение

$$i = \sqrt{-1}.$$

Величину $i$ назовем **мнимой единицей** и определим как некий математический объект, удовлетворяющий условию

$$i^2 = -1.$$

Тогда
$$z_{1,2} = \frac{-p \pm i\cdot\sqrt{|D|}}{2} = -\frac{p}{2} \pm i\cdot\frac{\sqrt{|D|}}{2} = x \pm i\cdot y.$$

*Определение*

**Комплексным числом** $z$ называется выражение вида $x + i\cdot y$, где $x$ и $y$ – действительные числа, а $i$ – мнимая единица. При этом число $x$ называется **действительной частью** числа $z$ и обозначается $\mathrm{Re}z$, а число $y$ – **мнимой частью** и обозначается $\mathrm{Im}z$.

Если $x = 0$, то комплексное число $z = i\cdot y$ называют **чисто мнимым**. Вместо записи $x + i\cdot y$ часто пишут короче $x + iy$ или $x + yi$, опуская знак умножения в мнимой части.

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой $C$.

*Определение*

Числа $z = x+iy$ и $\bar{z} = x-iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **комплексно сопряженными.**

*Определение*

Запись комплексного числа в виде $z = x + iy$ называется **алгебраической формой записи** комплексного числа.

*Определение*

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются **равными**, если равны их действительные и мнимые части:
$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

*Определение*

**Суммой** двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число
$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
а **разностью** – комплексное число
$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

*Определение*

**Произведением** двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Данная формула получается путем обычного арифметического перемножения двух двучленов:

$$\begin{gathered} z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = \\ = x_1\cdot x_2 + x_1\cdot iy_2 + iy_1\cdot x_2 + iy_1\cdot iy_2 = |i\cdot i{=}i^2{=}{-1}| = \\ = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{gathered}$$

*Определение*

**Частным от деления** двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Данная формула получается путем умножения числителя и знаменателя дроби $z_1/z_2$ на число, сопряженное знаменателю, $\bar{z}_2$.

*Пример:* Выполним арифметические действия над комплексными числами $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 2i$:

а) $z_1 + z_2 = (1 - i) + (3 + 2i) = (1 + 3) + i(-1 + 2) = 4 + i$;

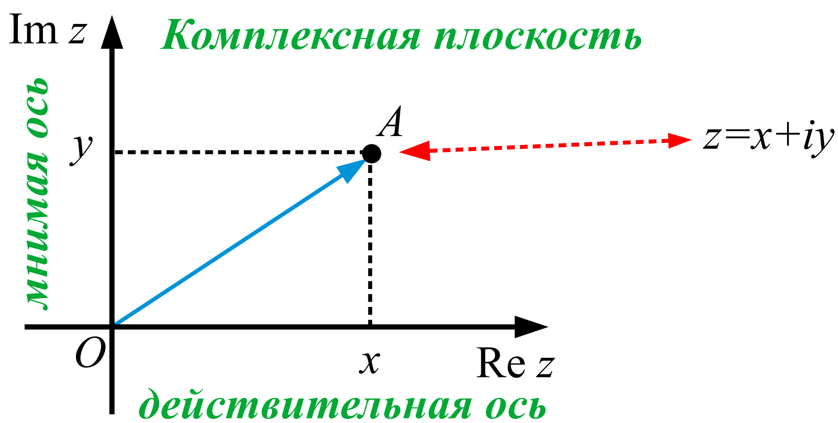
б) $z_1 - z_2 = (1 - i) - (3 + 2i) = (1 - 3) + i(-1 - 2) = -2 - 3i$;

в) $z_1 \cdot z_2 = (1 - i) \cdot (3 + 2i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2i - i \cdot 3 - i \cdot 2i = 5 - i$;

г) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1 - i}{3 + 2i} = \dfrac{(1 - i) \cdot (3 - 2i)}{(3 + 2i) \cdot (3 - 2i)} = \dfrac{3 - 2i - 3i - 2}{9 - 6i + 6i + 4} = \dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}i.$

# 2 Геометрическое изображение комплексных чисел

Любому комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие на плоскости $Oxy$ точку $A(x, y)$ или ее радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$. В этом случае плоскость $Oxy$ называется **комплексной плоскостью**, ось $Ox$ – **действительной осью**, т.к. на ней лежат действительные числа $z = x + i0 = x$, ось $Oy$ – **мнимой осью**, т.к на ней лежат чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$.




*Определение*

**Модулем** комплексного числа $z = x + iy$ называется модуль радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$, соответствующего этому числу.

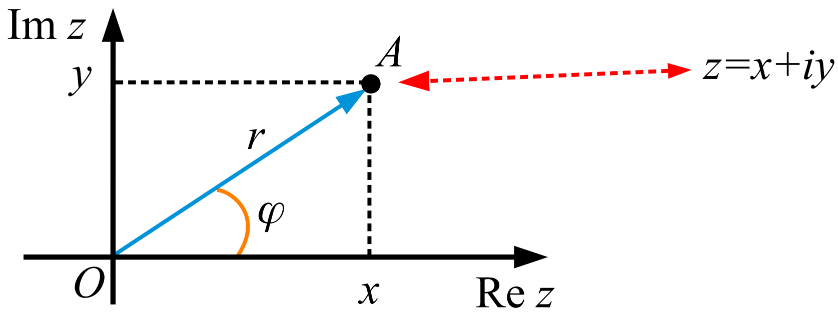
Обозначение: $r$, $\rho$, $|z|$.

Расчетная формула: $r = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

*Определение*

**Аргументом** комплексного числа $z = x + iy$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором $\overrightarrow{OA}$, соответствующим этому числу.

Обозначение: $\varphi$, $\mathrm{Arg} z$.




Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ является многозначной величиной:

$$\mathrm{Arg} z = \arg z + 2\pi n \ (n \in Z),$$

где $\arg z$ – **главное значение аргумента**, $-\pi < \arg z \leq \pi$. Для практических расчетов из множества значений аргумента $\mathrm{Arg} z$ в основном выбирают его главное значение $\arg z$, которое определяется по формуле:

$$\arg z = \mathrm{arctg}(y/x) + \pi k,$$

где $k$ выбирается по правилу:
если $z$ находится в 1-ой или 4-ой четвертях комплексной плоскости, то $k = 0$;
если $z$ находится во 2-ой четверти комплексной плоскости, то $k = 1$;
если $z$ находится в 3-ей четверти комплексной плоскости, то $k = -1$.

# 3 Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Из последнего рисунка видно, что

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Тогда комплексное число $z$ можно записать в виде:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r$ - модуль комплексного числа $z$, $\varphi$ - какое-либо значение его аргумента (в основном берут главное значение $\arg z$).

*Определение*

Запись в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется **тригонометрической формой записи** комплексного числа.

*Пример:* Записать комплексное число $z = 1-i$ в тригонометрической форме.

Для числа $z$ имеем $x = 1$, $y = -1$. Тогда
$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$,
$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}(y/x) + \pi k = \operatorname{arctg}((-1)/1) + \pi\cdot 0 = -\pi/4$.
Отсюда $z = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$.

*Арифметические действия над комплексными числами в тригонометрической форме:*

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда
1) $z_1\cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$,
2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где $n$ - целое положительное число. Это выражение называется **формулой Муавра**.

# 4 Показательная форма записи комплексного числа

Используя **формулу Эйлера**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

каждое комплексное число можно записать в форме

$$z = re^{i\varphi},$$

которая называется **показательной формой записи** комплексного числа.

*Арифметические действия над комплексными числами в показательной форме:*

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, 2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

# 5 Корень n-ой степени

*Определение*

Комплексное число $w$ называется **значением корня $n$-ой степени** из комплексного числа $z$, если

$$w^n = z.$$

Любое ненулевое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ обладает $n$ различными значениями корня $n$-ой степени $w_0$, $w_1$, ..., $w_{n-1}$, которые вычисляются по формуле:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right).$$

*Определение*

Множество всех значений корня $n$-ой степени из комплексного числа $z$ называется **корнем $n$-ой степени** из $z$ и обозначается $\sqrt[n]{z}$.

Таким образом,

$$\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, ..., w_{n-1}\}$$

или, что то же самое,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, ..., n-1.$$

*Пример:* Найти все значения $\sqrt[3]{-1}$.

Запишем число $z = -1 = -1 + i0$ в тригонометрической форме. Поскольку $x = -1$, $y = 0$, то $r = 1$, $\varphi = \pi$ и $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$.

Тогда

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Используя данную формулу, вычислим все значения нашего корня. Получаем

$k = 0$: $(\sqrt[3]{-1})_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

$k = 1$: $(\sqrt[3]{-1})_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$

$k = 2$: $(\sqrt[3]{-1})_2 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{-1} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -1; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$