Аналитическая геометрия
Модуль 2
Аналитическая геометрия
на плоскости и в пространстве.
Комплексные числа и многочлены
Лекция 2.2
(для ГУИМЦ, 2023)

Аннотация

Линии второго порядка на плоскости: эллипс, гипербола, парабола. Определение, характеристики, каноническое уравнение и исследование формы каждой линии.

1 Линии второго порядка

Определение

Алгебраической линией (кривой) второго порядка называется множество точек плоскости, координаты которых в декартовой прямоугольной системе координат Oxy удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

По крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля.

Это уравнение определяет на плоскости эллипс, гиперболу или параболу. В частных случаях оно также может определять две прямые, точку или мнимую кривую.

Если кривая симметрична относительно координатных осей или имеет вершину в начале координат, то ее уравнение имеет наиболее простой вид и называется **каноническим**.

2 Эллипс

Определение

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, причем эта величина больше, чем расстояние между фокусами.

Пусть фокусы эллипса F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O, и пусть расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка эллипса, $MF_1 + MF_2 = 2a$ и по определению эллипса $2a > 2c$.

По формуле расстояния между двумя точками

$$MF_1 = |\overrightarrow{MF_1}| = \sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$MF_2 = |\overrightarrow{MF_2}| = \sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Тогда из равенства $MF_1 + MF_2 = 2a$ получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Перенесем второе слагаемое из левой части равенства в правую и возведем обе части получившегося равенства в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2.$$

Откуда после ряда упрощений получаем

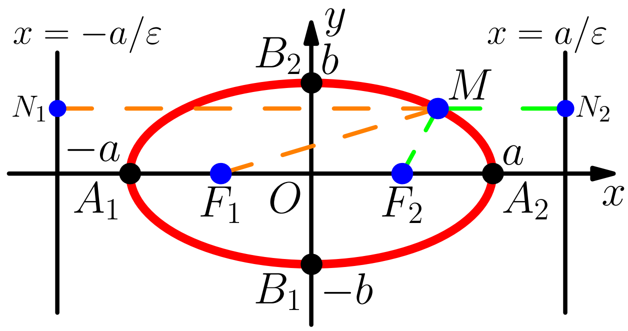
$$a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Еще раз возведем обе части получившегося равенства в квадрат, после чего разделим его на $a^2(a^2 - c^2)$. В результате получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Полагая $a^2 - c^2 = b^2$, придем к **каноническому уравнению эллипса**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



$\boxed{a>b}$

$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$,
$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$,
$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$,

$a^2-c^2=b^2$, $\varepsilon=c/a$,
$x=\pm a/\varepsilon$ – директрисы.

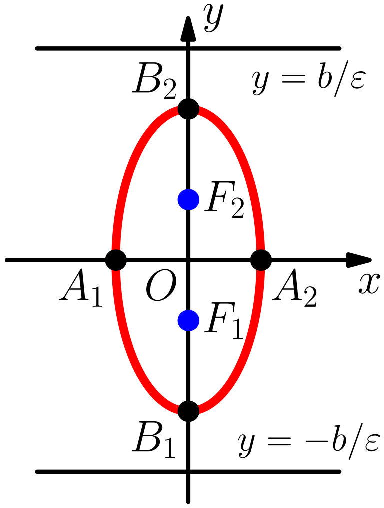
Точка O называется **центром эллипса**, а точки A_1, A_2 и B_1, B_2 – его **вершинами**. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 называются **большой и малой осями эллипса**, их длины равны $2a$ и $2b$, соответственно. Отрезки OA_2 и OB_2 называются **большой и малой полуосями эллипса**, причем их длины a и b также часто называют **большой и малой полуосями**. Расстояние между фокусами F_1 и F_2, равное $2c$, называется **фокальным (фокусным) расстоянием эллипса**, а число c – **полуфокусным расстоянием**. Ось, на которой лежат фокусы, есть **фокальная ось эллипса**.

Число $\varepsilon=c/a$ называется **эксцентриситетом эллипса**, его возможные значения: $0\le\varepsilon<1$. Когда $\varepsilon=0$ $(b=a)$, эллипс становится окружностью. Чем больше ε, тем более сплющенным будет эллипс.

Прямые $x=\pm a/\varepsilon$ называются **директрисами эллипса**. Их свойство – отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к аналогичному расстоянию до директрисы, лежащей по ту же сторону от центра O, что и фокус, есть величина постоянная, равная эксцентриситету, т.е. $MF_1/MN_1=\varepsilon$, $MF_2/MN_2=\varepsilon$.

Если фокусы эллипса $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$ расположены на оси Oy, то большая ось эллипса длиной $2b$ лежит на оси Oy, малая ось длиной $2a$ – на оси Ox, $a<b$, $b^2-c^2=a^2$ и $\varepsilon=c/b$. Уравнения директрис – $y=\pm b/\varepsilon$. Уравнение эллипса не меняется:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



$\boxed{a < b}$

$A_1(-a, 0),\ A_2(a, 0),$
$B_1(0, -b),\ B_2(0, b),$
$F_1(0, -c),\ F_2(0, c),$

$b^2 - c^2 = a^2$, $\varepsilon = c/b$,

$y = \pm b/\varepsilon$ – директрисы.

К вырожденным кривым второго порядка эллиптического типа относятся **мнимый эллипс**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

и **точка**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

3 Гипербола

Определение

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, причем эта величина меньше, чем расстояние между фокусами.

Пусть фокусы гиперболы F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O, и пусть расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка гиперболы, $|MF_1 - MF_2| = 2a$ и по определению гиперболы $2a < 2c$.

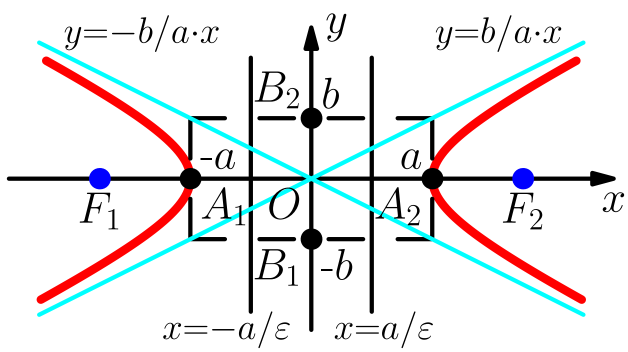
Используя формулу расстояния между двумя точками, из равенства $|MF_1 - MF_2| = 2a$ получаем

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a.$$

После преобразований, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим **каноническое уравнение гиперболы**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a^2 + b^2 = c^2$.



$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$,
$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$,
$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$,

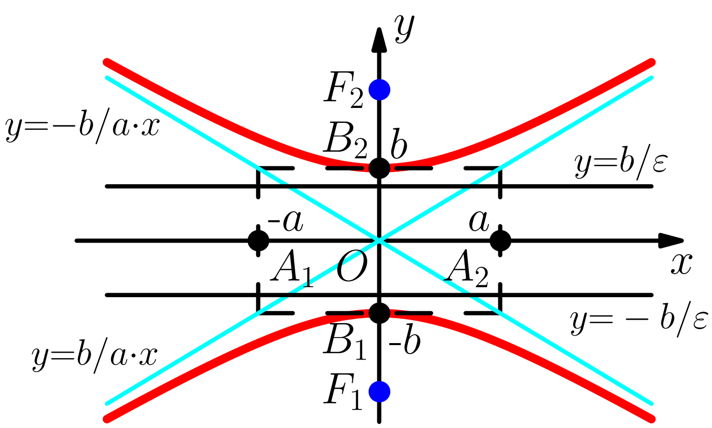
$a^2+b^2=c^2$, $\varepsilon = c/a$,
$y = \pm b/a \cdot x$ – асимптоты,
$x = \pm a/\varepsilon$ – директрисы.

Точка O называется **центром гиперболы**, а точки A_1 и A_2 – ее **вершинами**. Гипербола не пересекает ось Oy. Поэтому отрезок A_1A_2 называют **действительной осью гиперболы**, отрезок B_1B_2 -**мнимой осью гиперболы**, причем их длины равны $2a$ и $2b$, соответственно. Отрезки OA_2 и OB_2 называются **действительной и мнимой полуосями**, их длины a и b также часто называют **действительной и мнимой полуосями гиперболы**. Расстояние между фокусами F_1 и F_2, равное $2c$, называется **фокусным (фокальным) расстоянием гиперболы**, а число c – **полуфокусным расстоянием**. Ось, на которой лежат фокусы, есть **фокальная ось гиперболы**.

При неограниченном удалении точек гиперболы от начала координат они неограниченно приближаются к прямым, проходящим через диагонали прямоугольника со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$, т.е. к прямым $y = \pm b/a \cdot x$, которые являются **асимптотами гиперболы**.

Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом гиперболы**, его возможные значения: $1 < \varepsilon < +\infty$. Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются **директрисами гиперболы** и обладают тем же свойством, что и у эллипса: отношение расстояния от любой точки гиперболы до фокуса к аналогичному расстоянию до директрисы, лежащей по ту же сторону от центра O, что и фокус, есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Уравнение
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$
описывает **сопряженную гиперболу**.



$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$,
$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$,
$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$,

$a^2+b^2=c^2$, $\varepsilon = c/b$,
$y=\pm b/a\cdot x$ – асимптоты,
$y=\pm b/\varepsilon$ – директрисы.

Действительная и мнимая оси обычной гиперболы являются, соответственно, мнимой и действительной осями сопряженной гиперболы, а асимптоты у них общие. Фокусы сопряженной гиперболы $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$ расположены на оси Oy, эксцентриситет – $\varepsilon = c/b$, уравнения директрис – $y = \pm b/\varepsilon$.

Если полуоси гиперболы равны ($a = b$), то гипербола называется **равносторонней**. Ее каноническое уравнение
$$x^2 - y^2 = a^2.$$

К вырожденным кривым второго порядка гиперболического типа относится **пара пересекающихся прямых**
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

4 Парабола

Определение

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**, при этом расстояние от фокуса до директрисы называется **параметром параболы** и обозначается p $(p > 0)$.

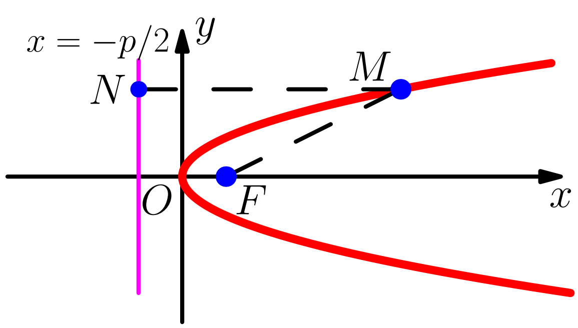
Расположим фокус параболы F на оси Ox, которая проходит перпендикулярно директрисе, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой. Тогда имеем фокус $F(p/2, 0)$ и **уравнение директрисы** $x = -p/2$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Тогда по определению $MF = MN$, где $N(-p/2, y)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. Откуда по формуле расстояния между двумя точками получаем

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{\left(-\frac{p}{2} - x\right)^2 + (y - y)^2}.$$

После возведения обеих частей равенства в квадрат получим **каноническое уравнение параболы**

$$y^2 = 2px.$$



Полагают, что **эксцентриситет параболы** $\varepsilon = 1$. Точку O называют **вершиной параболы**, а величину FM – **фокальным радиусом точки** M.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ также определяют параболы.

К вырожденным кривым второго порядка параболического типа относятся **пара совпадающих прямых** $(y - c)^2 = 0$, **пара параллельных прямых** $y^2 = c^2$ и **пара мнимых параллельных прямых** $y^2 = -c^2$.