

Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра.

Векторная алгебра

Лекция 1.5

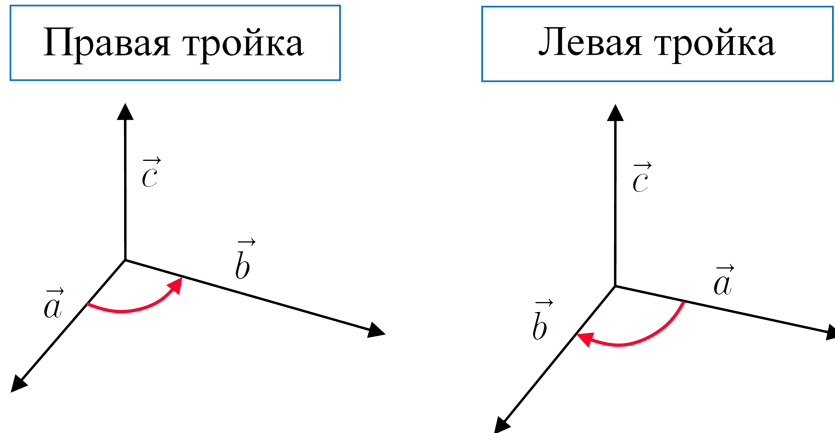
Аннотация

Ориентация векторов в пространстве. Правая и левая тройки векторов. Определения векторного и смешанного произведений векторов, их свойства, геометрический и механический смыслы и практические приложения.

1 Векторное произведение векторов

Определение

Три некопланарных вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если с конца третьего вектора \vec{c} кратчайший поворот от первого вектора \vec{a} ко второму вектору \vec{b} виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой.



Так как три некопланарных вектора образуют базис в пространстве, то все базисы в пространстве делятся на два класса: **класс правых базисов** и **класс левых базисов**. Класс, к которому относится фиксированный базис, определяет его **ориентацию**.

Определение

Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор \vec{c} , который удовлетворяет условиям:

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;
 - 2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;
 - 3) векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} образуют правую тройку.
- Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Алгебраические свойства векторного произведения:

- 1) антикоммутативный закон

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

- 2) дистрибутивный закон

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

- 3) ассоциативный закон относительно числового множителя

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \lambda \in R.$$

Геометрическое свойство векторного произведения:

Векторное произведение двух векторов равняется нулевому вектору тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны, т.е.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

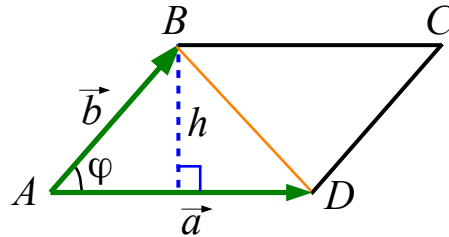
Теорема (векторное произведение в координатной форме)

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Геометрический смысл векторного произведения:

Построим на векторах \vec{a} и \vec{b} параллелограмм $ABCD$:



Площадь параллелограмма $ABCD$ равна

$$S_{ABCD} = AD \cdot h = AD \cdot AB \cdot \sin \varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

или коротко

$$S_{ABCD} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Эта формула задает *геометрический смысл векторного произведения* – модуль векторного произведения векторов \vec{a} и \vec{b} есть площадь параллелограмма, построенного на данных векторах.

Также можно получить, что высота параллелограмма $ABCD$ есть

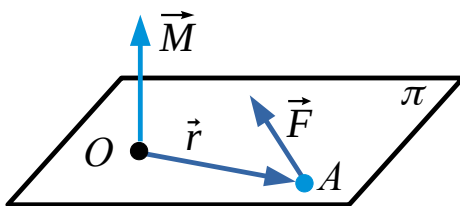
$$h = \frac{S_{ABCD}}{AD} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

В свою очередь, площадь треугольника ABD равна половине площади параллелограмма $ABCD$:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Механический смысл векторного произведения:

Пусть на частицу A действует сила \vec{F} . Положение этой частицы в пространстве в каждый момент времени задается ее радиус-вектором \vec{r} относительно некоторой фиксированной точки O (полюса).



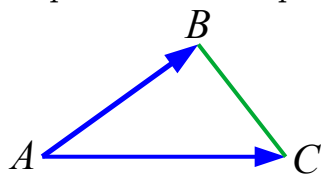
Вектор $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ называется **моментом силы** \vec{F} относительно точки O и характеризует способность силы вращать частицу A вокруг точки O в плоскости π , содержащей точку O и силу \vec{F} .

Примеры:

- I. Найти площадь треугольника с вершинами
 $A(5; 2; -1)$, $B(3; 1; -2)$ и $C(4; -2; 2)$.

Решение.

Треугольник ABC построен на векторах \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .



Воспользуемся формулой:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

1. Найдем векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} :

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 5; 1 - 2; -2 - (-1)) = (-2; -1; -1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (4 - 5; -2 - 2; 2 - (-1)) = (-1; -4; 3).$$

2. Вычислим векторное произведение:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= -7\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k} = (-7; 7; 7). \end{aligned}$$

3. Найдем площадь треугольника:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + 7^2} = \frac{7}{2} \sqrt{3} \text{ (кв. ед)}. \blacksquare$$

II. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n},$$

где \vec{m} и \vec{n} - единичные векторы, образующие угол 30° .

Решение.

Воспользуемся формулой:

$$S_{ABCD} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

1. Найдем векторное произведение:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) = \\ &= 2 \underbrace{(\vec{m} \times \vec{m})}_{\vec{0}} + \vec{m} \times \vec{n} + 4 \underbrace{(\vec{n} \times \vec{m})}_{-(\vec{m} \times \vec{n})} + 2 \underbrace{(\vec{n} \times \vec{n})}_{\vec{0}} = \\ &= \vec{m} \times \vec{n} - 4(\vec{m} \times \vec{n}) = -3(\vec{m} \times \vec{n}). \end{aligned}$$

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= |-3(\vec{m} \times \vec{n})| = |-3| \cdot |\vec{m} \times \vec{n}| = \\ &= 3 \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin 30 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1,5. \end{aligned}$$

3. Найдем площадь параллелограмма:

$$S_{ABCD} = |\vec{a} \times \vec{b}| = 1,5 \text{ (кв.ед)}. \blacksquare$$

2 Смешанное произведение векторов

Определение

Если вектор \vec{a} векторно умножить на вектор \vec{b} , а полученный вектор скалярно умножить на вектор \vec{c} , то получится число, называемое **смешанным произведением** векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

Обозначение: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Алгебраические свойства смешанного произведения:

1) в смешанном произведении знаки векторного и скалярного умножений можно менять местами, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$

2) дистрибутивный закон

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c},$$

3) ассоциативный закон относительно числового множителя

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\lambda\vec{c}) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c}), \lambda \in R.$$

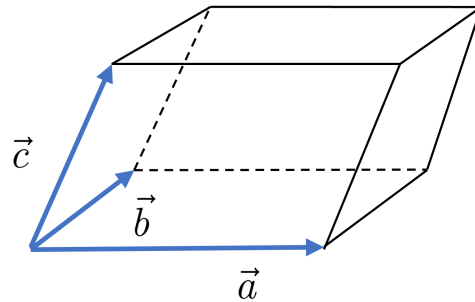
Геометрическое свойство смешанного произведения:

Смешанное произведение трех векторов равняется нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ компланарны.}$$

Геометрический смысл смешанного произведения:

На трех некопланарных векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , выходящих из одной точки, построим параллелепипед.



Тогда объем построенного параллелепипеда будет численно равен значению смешанного произведения векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , взятому по модулю:

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,$$

а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, есть

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Теорема (смешанное произведение в координатной форме)

Пусть заданы три вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приложение смешанного произведения:

Взаимная ориентация векторов в пространстве:

- 1) если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая,
- 2) если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая.

Пример:

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки

$$M_1(2; 5; 3), M_2(3; 7; 4), M_3(-5; 5; -1), M_4(-4; -3; 0).$$

Решение.

1. Найдем векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_1M_4}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3 - 2; 7 - 5; 4 - 3) = (1; 2; 1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (-5 - 2; 5 - 5; -1 - 3) = (-7; 0; -4),$$

$$\overrightarrow{M_1M_4} = (-4 - 2; -3 - 5; 0 - 3) = (-6; -8; -3).$$

2. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) \cdot \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & -4 \\ -6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

Отсюда на основании геометрического свойства смешанного произведения делаем вывод, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$ не являются компланарными, т.е. не лежат в одной плоскости. Это значит, что точки M_1, M_2, M_3, M_4 также не лежат в одной плоскости. ■