

Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра.

Векторная алгебра

Лекция 1.4

Аннотация

Геометрические векторы и их виды. Линейные операции над векторами (сложение двух векторов и умножение вектора на число) и их свойства. Линейная зависимость векторов, критерий линейной зависимости и свойства систем линейно зависимых и независимых векторов.

1 Геометрические векторы

Определение

Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются **скалярными** (длина, температура).

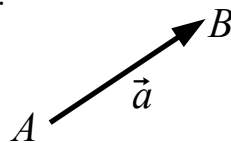
Определение

Величины, которые характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением, называются **векторными** (сила, скорость).

Определение

Геометрический вектор – это отрезок с заданным направлением.

Обозначение: \vec{a} или \overrightarrow{AB} .



Здесь A - начало вектора, B - конец вектора.

Виды геометрических векторов:

1. Если точка приложения вектора не фиксирована, то вектор называется **свободным**.
2. Если точку приложения вектора можно перемещать только вдоль прямой, то вектор называется **скользящим**.
3. Если точка приложения вектора фиксирована, то вектор называется **связанным**.

Определение

Длиной (модулем) вектора \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB .
Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Обозначение: $\vec{0}$.

Нулевой вектор направления не имеет.

Определение

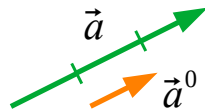
Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

Обозначение: \vec{e} .

Определение

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора \vec{a} , называется **ортом** вектора \vec{a} .

Обозначение: \vec{a}^0 .

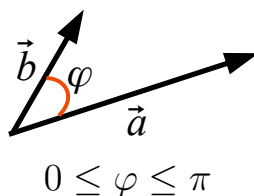


$$|\vec{a}| = 3, |\vec{a}^0| = 1$$

Определение

Углом между векторами \vec{a} и \vec{b} называют величину наименьшего из углов, образованных этими векторами при условии, что их начальные точки совпадают.

Обозначение: $\widehat{\vec{a} \vec{b}}$, (\vec{a}, \vec{b}) , φ .

*Определение*

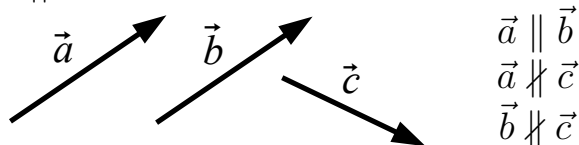
Векторы \vec{a} и \vec{b} называются **ортогональными**, если угол между ними прямой.

Обозначение: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

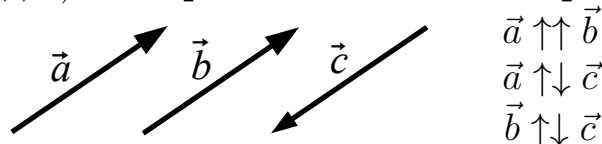
Определение

Векторы \vec{a} и \vec{b} называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.



Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление, $\vec{a} \uparrow \vec{b}$) или **противоположно направлены** ($\vec{a} \updownarrow \vec{b}$).



Нулевой вектор считается одновременно коллинеарным и ортогональным любому вектору.

Определение

Три вектора в пространстве называются **компланарными**, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

Определение

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, сонаправлены и их длины равны.

Обозначение: $\vec{a} = \vec{b}$.

2 Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся:

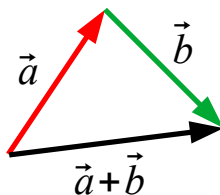
- 1) сложение векторов;
- 2) умножение вектора на число.

Определение

Суммой векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , направленный из начала вектора \vec{a} в конец вектора \vec{b} при условии, что \vec{b} приложен к концу \vec{a} .

Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Задаваемое определением правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника**:



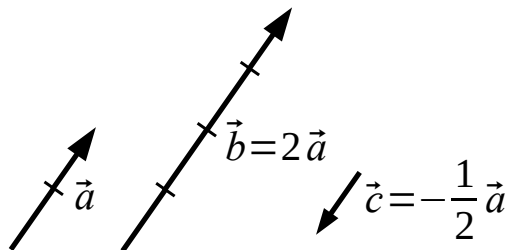
Определение

Произведением вектора \vec{a} на число λ называется такой вектор \vec{c} , что

- 1) $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
- 2) $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$, и $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Обозначение: $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a}$ или $\vec{c} = \lambda \vec{a}$.

Примеры:



Свойства линейных операций над векторами:

- 1) коммутативный закон сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

- 2) ассоциативный закон сложения векторов

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$

- 3) ассоциативный закон умножения вектора на число относительно умножения чисел

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} = \beta(\alpha\vec{a}),$$

- 4) дистрибутивный закон умножения вектора на число относительно сложения векторов

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b},$$

- 5) дистрибутивный закон умножения вектора на число относительно сложения чисел

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a},$$

- 6) умножение на ноль

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0},$$

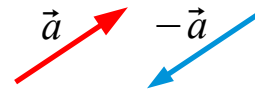
- 7) сложение с нулевым вектором

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Следствия из свойств линейных операций:

1. Вектор $-\vec{a}$, называемый **противоположным** вектору \vec{a} , определяется как

$$-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}.$$



2. Вектор $\vec{a} - \vec{b}$, называемый **разностью** векторов \vec{a} и \vec{b} , определяется как

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



3 Линейная зависимость векторов

Определение

Выражение $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ называется **линейной комбинацией векторов** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - любые действительные числа, называемые **коэффициентами** линейной комбинации.

Определение

Будем говорить, что **вектор** \vec{b} **разлагается (линейно выражается) по векторам** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, если он равен некоторой их линейной комбинации. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются **коэффициентами разложения** вектора \vec{b} по системе векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Определение

Линейная комбинация векторов называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю, и **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Определение

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору.

Определение

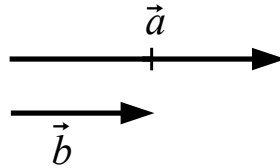
Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется **линейно независимой**, если только их тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору.

Теорема (критерий линейной зависимости векторов)

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда какой-либо из векторов этой системы можно представить в виде линейной комбинации остальных.

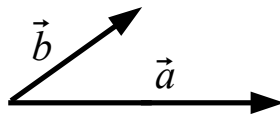
Примеры:

1.



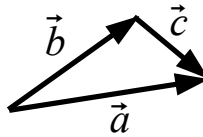
Векторы \vec{a} и \vec{b} линейно зависимы, т.к. вектор \vec{a} можно выразить через вектор \vec{b} в виде $\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$. В этом случае для векторов \vec{a} и \vec{b} можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору: $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

2.



Векторы \vec{a} и \vec{b} линейно независимы, т.к. вектор \vec{a} нельзя выразить через вектор \vec{b} . Для векторов \vec{a} и \vec{b} можно составить лишь тривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору: $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

3.



Векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} линейно зависимы, т.к. вектор \vec{a} можно выразить через векторы \vec{b} и \vec{c} в виде $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Тогда $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$.

Свойства систем линейно зависимых и независимых векторов:

1. Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

2. Если система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно независима, то любая часть этой системы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ ($s < n$) линейно независима.

3. Если система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависима, то любая дополненная система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_{n+m}$ линейно зависима.

4. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

5. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.
6. Любые четыре вектора линейно зависимы.