

**КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН**  
дисциплины «Математический анализ»  
для студентов 1 курса 2 семестра 2020-21 учебного года  
УЦ1-21, УЦ1-22

*ЛИТЕРАТУРА*

- Л-1.* Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и втузов. – М.: Высшая школа, 1981. – Т. 1. – 687 с.  
*Л-2.* Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Под общ. ред. А.В.Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1993. – 480 с.

*ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА*

- ДЛ-1.* Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2001. – 432 с.  
*ДЛ-2.* Соболев С.К., Ильичев А.Т. Исследование и построение плоских кривых, заданных параметрически и в полярных координатах. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 80 с  
*ДЛ-3.* Столярова З.Ф. Как вычислять пределы. Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. – 182 с.

**ЛЕКЦИИ**

**МОДУЛЬ 3: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

**Лекция 3.1.** Производная функции в точке. Касательная, геометрический смысл производной. Бесконечная производная и её геометрическая интерпретация. Односторонние производные, их связь с двусторонней производной. Дифференцируемость функции в точке, эквивалентность дифференцируемости существованию в точке конечной производной. Непрерывность дифференцируемой функции. Дифференциал функции, его геометрический смысл.

**Лекция 3.2.** Теоремы Ферма, Ролля, Коши и Лагранжа. Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей. Порядок роста функции. Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций в бесконечности.

**Лекция 3.3.** Понятие многочлена Тейлора степени  $n$  для данной функции в точке  $c$ . Совпадение значений в точке  $c$  функции и её многочлена Тейлора, а также их первых  $n$  производных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано. Формула Маклорена. Использование формул Тейлора и Маклорена в приближенных вычислениях. Монотонность функции. Достаточное условие монотонности. Стационарные и критические точки функции. Экстремум функции.

**Лекция 3.4.** Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума: (а) по первой производной, (б) по второй производной. Понятие выпуклости (вверх, вниз) функции на промежутке. Достаточное условие выпуклости дважды дифференцируемой функции. Точки перегиба функции. Необходимое условие перегиба, достаточное условие перегиба. Схема полного исследования и построения графика функции.

## МОДУЛЬ 4: ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Лекция 4.1.** Метрика в  $R^n$ . Скалярная функция нескольких переменных (ФНП). Линии и поверхности уровня. Предел ФНП. Бесконечно малые и бесконечно большие ФНП. Непрерывность ФНП в точке, на множестве. Свойства ФНП, непрерывных на множестве. Частные производные ФНП, геометрическая интерпретация для  $n=2$ . Дифференцируемость ФНП. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости. Непрерывность дифференцируемой ФНП.

**Лекция 4.2.** Производная сложной функции. Частная и полная производные ФНП. Первый дифференциал ФНП и инвариантность его формы. Дифференциалы высших порядков. Задача о полном дифференциале.

**Лекция 4.3.** Формула Тейлора. Экстремум ФНП. Необходимое условие существования экстремума. Достаточные условия существования экстремума (по второму дифференциалу и по угловым минорам матрицы Гессе). Алгоритмы поиска точек экстремума для функций двух и трех переменных.

**Лекция 4.4.** Векторная функция скалярного аргумента, ее график. Предел и непрерывность векторной функции. Производная векторной функции, ее геометрический и физический смысл. Уравнения касательной к пространственной кривой. Правила дифференцирования векторной функции. Теорема о производной векторной функции постоянной длины, ее геометрическая интерпретация.

## МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

### МОДУЛЬ 3: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**Текст 3.1** (после лекции 3.1). Производные основных элементарных функций. Правила вычисления производной, связанные с арифметическими действиями над функциями. Производная сложной и обратной функций. Производные высших порядков. Физический смысл первой и второй производных. Правила вычисления дифференциалов. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

**Текст 3.2** (после лекции 3.3). Представление по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Использование формул Тейлора и Маклорена для нахождения пределов.

### МОДУЛЬ 4: ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Текст 4.1** (после лекции 4.1). Окрестности в  $R^n$ . Открытые, замкнутые, ограниченные и линейно связные множества в  $R^n$ , граница множества, область. Приближенные вычисления значений ФНП. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования.

**Текст 4.2** (после лекции 4.2). Неявные функции. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции. Системы неявных функций. Теорема о существовании и дифференцируемости системы неявных функций. Производная ФНП по направлению и градиент, их свойства. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

**Текст 4.3** (после лекции 4.3). Условный экстремум ФНП, его геометрическая интерпретация (при  $n=2$ ), функция Лагранжа. Необходимое условие существования условного экстремума. Достаточное условие существования условного экстремума. Алгоритм поиска условного экстремума функции двух переменных с одним уравнением связи. Нахождение наибольшего и наименьшего значений ФНП на замкнутом ограниченном множестве.

**Текст 4.4** (после лекции 4.4). Кривая в пространстве, способы ее задания. Длина дуги кривой. Производная и дифференциал длины дуги плоской и пространственной кривой, геометрический смысл дифференциала длины дуги плоской кривой. Кривизна и радиус кривизны плоской кривой. Центр и окружность кривизны плоской кривой.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

### МОДУЛЬ 3: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**Занятие 1.** Вычисление производных с помощью таблицы производных основных элементарных функций и правил, связанных с арифметическими действиями над функциями.

Ауд: Л-2 №№ 5.1, 5.2, 5.9, 5.11, 5.21, 5.23, 5.27, 5.29, 5.35, 5.49, 5.43, 5.37, 5.41, 5.39

Дома: Л-2 №№ 5.3, 5.10, 5.12, 5.22, 5.26, 5.32, 5.34, 5.38, 5.40, 5.42, 5.44

**Занятие 2.** Вычисление производных сложных функций.

Ауд:  $y = v(u(x))$ :  $y = \sin 3x$ ,  $y = \operatorname{tg}(4x+1)$ ,  $y = 2^{6x+1}$ ,  $y = \log_3(x^2 + 5)$

$y = w(v(u(x)))$ :  $y = \sin^2 4x$ ,  $y = \operatorname{ctg}^3(5x^2 + 1)$ ,  $y = 2^{\cos 3x+1}$

$y = t(w(v(u(x))))$ :  $y = \cos^2(\sin x^4)$

$y = p(t(w(v(u(x))))))$ :  $y = \left(6 + 3 \cdot 2^{\arcsin(3x^2+1)}\right)^3$

Л-2 №№ 5.62-5.65

Дома: Л-2 №№ 5.49, 5.50, 5.47, 5.51, 5.54, 5.55, 5.59, 5.61

**Занятие 3.** Комбинирование правил дифференцирования.

Ауд: Л-2 №№ 5.53, 5.52, 5.46, 5.60, 5.65, 5.69, 5.66, 5.77, 5.79

Дома: Л-2 №№ 5.56, 5.57, 5.58, 5.68, 5.67, 5.78, 5.80

**Занятие 4.** Логарифмическая производная. Производные высших порядков.

Ауд: Л-2 №№ 5.85, 5.87, 5.91, 5.184, 5.186, 5.190

Дома: Л-2 №№ 5.86, 5.88, 5.89, 5.111, 5.185, 5.188, 5.191

**Занятие 5.** Производные первого и второго порядков неявной функции и функции, заданной параметрически.

Ауд: Л-2 №№ 5.144, 5.147, 5.151, 5.154, 5.224, 5.225, 5.168, 5.171, 5.231

Дома: Л-2 №№ 5.145, 5.149, 5.169, 5.176, 5.226, 5.232

**Занятие 6.** Уравнение касательной и нормали. Дифференциал и его приложения.

Ауд: Л-2 №№ 5.235, 5.236, 5.241, 5.243, 5.277, 5.287, 5.288, 5.290, 5.293

Вычислить приближенно: 1)  $\sqrt[3]{1,009}$ , 2)  $(0,99)^4$ , 3)  $\sin 29^\circ$ , 4) 5.298(а)

Дома: Л-2 №№ 5.237, 5.242, 5.244, 5.286, 5.289, 5.291, 5.294, 5.295, 5.298(б, в)

**Занятие 7-8.** Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей.

Ауд: Л-2 №№ 5.329, 5.330, 5.337, 5.343, 5.345, 5.338, 5.342; 5.349, 5.352 ( $x \rightarrow 0+0$ ), 5.350, 5.360, 5.364, 5.365, 5.373

Дома: Л-2 №№ 5.333, 5.334, 5.336, 5.339, 5.340; 5.353, 5.355, 5.362, 5.368, 5.370, 5.378

**Занятие 9.** Формула Тейлора функции одной переменной

Ауд: Л-2 №№ 5.382 (3-его порядка), 5.385 (3-его порядка), 5.389 (3-его порядка), 5.396, 5.400 (а)

Дома: Л-2 №№ 5.395, 5.393, 5.400 (б)

**Занятие 10.** Рубежный контроль «Приложения дифференциального исчисления».

**Занятие 11-12.** Асимптоты графиков функций, интервалы возрастания и убывания, экстремум. Интервалы выпуклости и точки перегиба графиков функций.

Ауд: Л-2 №№ 5.453,  $y = \frac{x^3}{x^4 - 1}$  (найти асимптоты графика функции), 5.404, 5.406, 5.409, 5.441,

найти интервалы выпуклости и точки перегиба графиков функций:  $y = \frac{x^2}{x-1}$ ,  $y = e^{\frac{1}{x}}$

Дома: Л-2 №№ 5.405, 5.452, 5.457, 5.440, 5.445, 5.447

**Занятие 13-14.** Общая схема исследования функций и построение их графиков.

Ауд: Л-2 №№ 5.466, 5.463, 5.476, 5.500

Дома: Л-2 №№ 5.469, 5.499, 5.511

#### МОДУЛЬ 4: ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Занятие 15.** Область определения ФНП. Линии уровня.

Ауд:

1) Л-2 №№ 7.4, 7.7, 7.8, 7.9, 7.15, 7.16

2) построить линии уровня функций:  $u = x + y$ ,  $u = y/x$ ,  $u = x \cdot y$ ,  $u = x^2/4 + y^2/9$

Дома: Л-2 №№ 7.5, 7.6, 7.10

**Занятие 16.** Пределы, повторные пределы, точки и линии разрыва ФНП.

Ауд:

1) найти линии разрыва указанных функций

a)  $f(x, y) = \frac{2x-1}{x^2+y^2-4}$ , b)  $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{y-\ln x}$

2) вычислить повторные пределы функций в указанных точках

a)  $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , b)  $f(x, y) = \frac{y^2 \cos(1/y) + x}{x+y}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$

3) вычислить двойные пределы

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x+y}{3x-y}, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{xy}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{xy}, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\operatorname{arctg}(x-y)}{x^2-y^2}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1+x+y)^{\frac{1}{x+y}},$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x \arcsin(x-2)}{xy-x-2y+2}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{e^{-xy^2}-1}{xy}, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} (x+y)^{1/((x+y)^2-1)}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^3-y^2x)\sqrt{x-y}}{x^2-xy+x-y}$$

Дома: Л-2 №№ 7.32, 7.33, 7.34, 7.35, 7.44, 7.47, 7.48

**Занятие 17.** Частные производные ФНП. Дифференциал ФНП.

Ауд:

1) найти частные производные 1-ого и 2-ого порядков

$$f(x, y) = (x+y)e^{xy}, f(x_1, x_2) = (2x_1+1)^{-x_2}, f(a, b) = \sqrt[3]{4a-3b}$$

2) Л-2 №№ 7.101, 7.108

Дома: Л-2 №№ 7.55, 7.57, 7.59, 7.60, 7.68, 7.70, 7.102, 7.109

**Занятие 18-19.** Дифференцирование сложной функции.

Ауд:

1) Л-2 №№ 7.114, 7.117, 7.118

2) a)  $z = \sin(2u - v^3)$ ,  $u = \frac{2y}{x+y}$ ,  $v = x^2 - 3y$

б)  $z = \operatorname{arctg}(2x_1 - 3x_2)$ ,  $x_1 = u_1 u_2$ ,  $x_2 = (u_1 - u_2)^2$

3) Найти  $dz$ , если  $z = \operatorname{arctg} uv$ ,  $u = \ln(x^2 - y^2)$ ,  $v = xy^2$

Дома: Л-2 №№ 7.115, 7.119, 7.120, 7.121

**Занятие 20.** Производная неявной функции. Градиент. Производная по направлению.

Ауд:

1) Л-2 №№ 7.140, 7.145

2) для заданной функции  $f$  в точке  $M$  найти градиент и производную в направлении вектора  $\vec{s}$

a)  $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13)$ ,  $M(2, 2)$ ,  $\vec{s} = \vec{i} + \vec{j}$

b)  $f(x, y) = \ln(4x + 2y - 5 - y^2)$ ,  $M(2, 2)$ ,  $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j}$

- 3) найти производную функции  $z = 3x^2 + 5y^2$  в точке  $A(1; -1)$  по направлению к точке  $B(2; 1)$   
4) изобразить линию уровня функции  $z = 4 - x^2 - y^2$ , проходящую через точку  $A(1; 1)$ , построить  $\text{grad } z(1; 1)$  и убедиться, что он перпендикулярен данной линии уровня

Дома: Л-2 №№ 7.141, 7.146

**Занятие 21.** Касательная плоскость и нормаль. Формула Тейлора функции нескольких переменных.

Ауд:

1) написать общее уравнение касательной плоскости и канонические уравнения нормали в точке  $M$  поверхности  $S$

а)  $S: z = x^3y - y^3x - 6$ ,  $M(1; 1; -6)$

б)  $S: x^3 + y^3 + z^3 + 3(x - y) - 11 = 0$ ,  $M(1, 1, 3)$

в)  $S: z^2 = x^2 + 2y^2$ ,  $M(1, 0, 1)$

2) Л-2 №№ 7.182, 7.181 (2-ого порядка)

Дома: Л-2 №№ 7.184, 7.185

**Занятие 22.** Экстремум ФНП.

Ауд: Л-2 №№ 7.187, 7.189, 7.196, 7.197

Дома: Л-2 №№ 7.188

**Занятие 23.** Условный экстремум

Ауд: Л-2 №№ 7.201, 7.203, 7.204

Дома: Л-2 №№ 7.202, 7.205

**Занятие 24.** Рубежный контроль «Функции нескольких переменных».

### Контрольные мероприятия:

#### Модуль 3

Рубежный контроль «Приложения дифференциального исчисления». Срок сдачи — 9 неделя

Домашнее задание «Приложения дифференциального исчисления». Срок сдачи — 9 неделя

#### Модуль 4

Рубежный контроль «Функции нескольких переменных». Срок сдачи — 16 неделя

Домашнее задание «Функции нескольких переменных». Срок сдачи — 16 неделя