

Математический анализ

Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 3.1

Аннотация

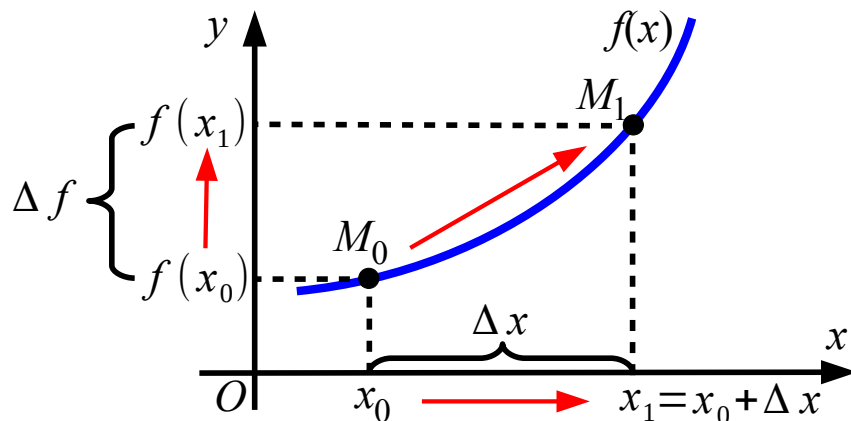
Производная функции, ее геометрический смысл. Односторонние производные, их связь с двусторонней производной. Дифференцируемость функции. Свойства дифференцируемых функций. Дифференциал функции, его геометрический смысл.

1 Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0 . В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1 . Тогда

$\Delta x = x_1 - x_0$ – приращение значения аргумента x в точке x_0 при переходе к точке x_1 ,

$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение значения функции $f(x)$ в точке x_0 при переходе к точке x_1 .



Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . **Производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \infty, +\infty, -\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 существует **бесконечная производная**, в противном случае – **конечная производная**.

Замечание

Поскольку мы работаем в основном с конечными производными, то в дальнейшем для краткости под словом "производная" мы будем понимать именно конечную производную. Случай бесконечной производной будет всегда оговариваться особо.

Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_+(x_0)$.

Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_-(x_0)$.

Определение

Правосторонняя и левосторонняя производные называются **односторонними производными**.

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)

$$\exists f'(x_0) = A \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0) = A, f'_-(x_0) = A.$$

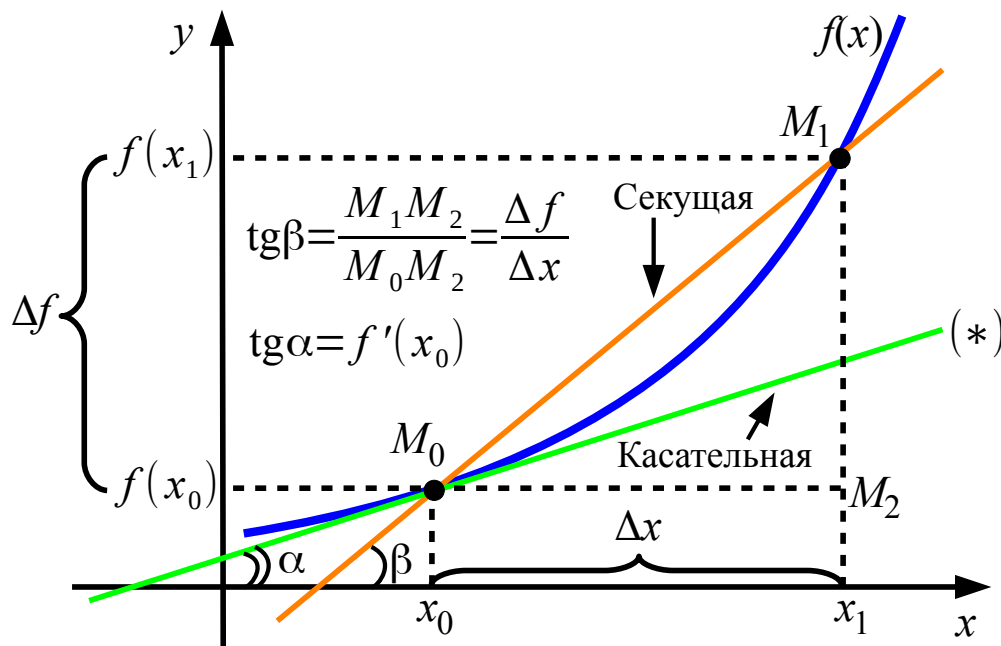
Определение

Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**.

2 Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$.

Через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, проведем секущую M_0M_1 графика функции $y = f(x)$ (см. рисунок ниже). Устремив точку M_1 к точке M_0 , мы переведем секущую M_0M_1 в прямую (*), которая в окрестности точки x_0 будет иметь с графиком функции $f(x)$ только одну общую точку.



Определение

Предельное положение секущей M_0M_1 , когда $M_1 \rightarrow M_0$, называется **наклонной касательной** к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .

Коэффициенты уравнения $y = kx + b$ секущей M_0M_1 находим из условий

$$M_0 : y_0 = kx_0 + b \text{ и } M_1 : y_1 = kx_1 + b.$$

Откуда получаем

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

где $\Delta f = y_1 - y_0$, $\Delta x = x_1 - x_0$.

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \rightarrow x_0$ или $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x , x_0 , y_0 не зависят от x_1 , то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Обозначив

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = y_{\text{кас}},$$

получаем **уравнение касательной**

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Откуда следует **геометрический смысл** конечной производной:

$$f'(x_0) = \text{tg } \alpha,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .

3 Дифференцируемость функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0 , если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 .

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0).$$

Доказательство

1. *Прямая теорема. (\Rightarrow)*

Дано: $f(x) \in D(x_0)$.

Доказать: $\exists f'(x_0)$.

$$\begin{aligned} f(x) \in D(x_0) &\Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \\ &\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A \Rightarrow \exists f'(x_0) = A. \end{aligned}$$

2. *Обратная теорема. (\Leftarrow)*

Дано: $\exists f'(x_0)$.

Доказать: $f(x) \in D(x_0)$.

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$.

Отсюда

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Т.к.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

то

$$\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$$

↓

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

↓

$$f(x) \in D(x_0). \blacksquare$$

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A \cdot \Delta x + o(\Delta x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in C(x_0). \blacksquare$$

4 Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$.

Определение

Линейная по переменной Δx функция $A\Delta x$ называется **дифференциалом (первым дифференциалом, дифференциалом первого порядка)** функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначение: $df(x_0)$

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь, приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx . Тогда

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$$

и

$$\Delta f = df(x_0) + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0.$$

Пример:

$$f(x) = x^3, x_0 = 1,$$

$$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3 \Rightarrow df(1) = f'(1)dx = 3dx.$$

Геометрический смысл дифференциала

Если Δf - это приращение значения функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении значения аргумента x на Δx , то $df(x_0)$ - это приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении значения аргумента x на Δx (см. рисунок).

