Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия

Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Комплексные числа и многочлены

Лекция 2.2

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

Линии второго порядка

Определение

Алгебраической линией (кривой) второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в декартовой системе координат Oxy задается уравнением второй степени относительно текущих координат

Линии второго порядка

Определение

Алгебраической линией (кривой) второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в декартовой системе координат Oxy задается уравнением второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Определение

Алгебраической линией (кривой) второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в декартовой системе координат Oxy задается уравнением второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

По крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля.

Линии второго порядка

Это уравнение определяет на плоскости эллипс, гиперболу или параболу.

Это уравнение определяет на плоскости эллипс, гиперболу или параболу. В некоторых частных случаях это уравнение может определять также две прямые, точку или мнимое геометрическое место точек.

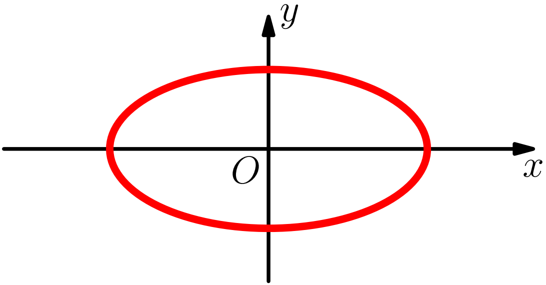
Если кривая имеет специфическое расположение относительно системы координат (например, симметрична относительно некоторых координатных осей или имеет вершину в начале координат и пр.), то ее уравнение имеет достаточно простой вид, который называется **каноническим**.

Эллипс

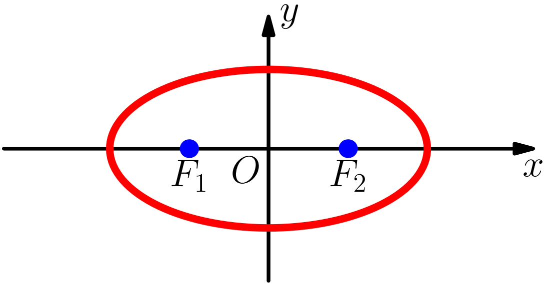
Определение

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, причем эта величина больше, чем расстояние между фокусами.

Эллипс

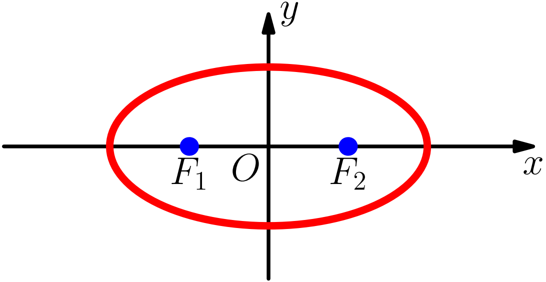


Эллипс



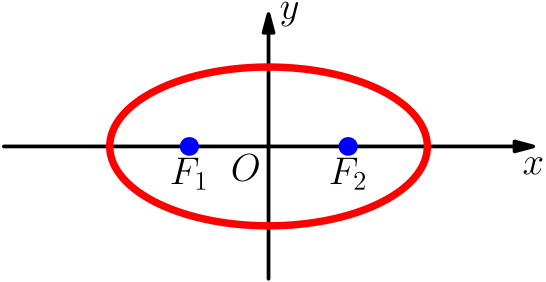
Пусть фокусы эллипса F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O,

Эллипс



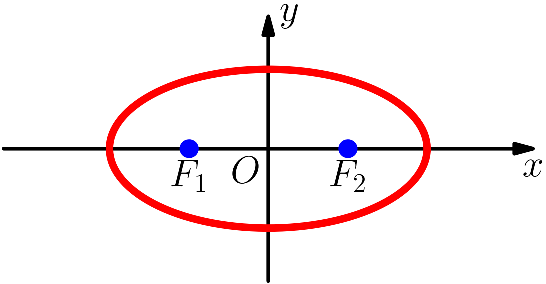
Пусть фокусы эллипса F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O, и пусть расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$.

Эллипс



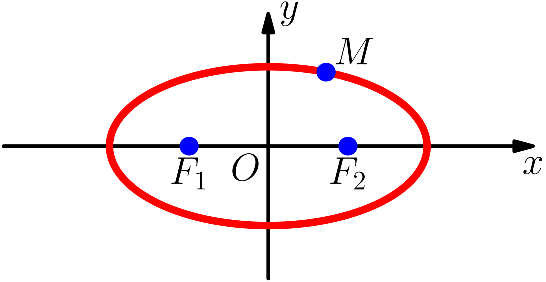
Пусть фокусы эллипса F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O, и пусть расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Эллипс



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

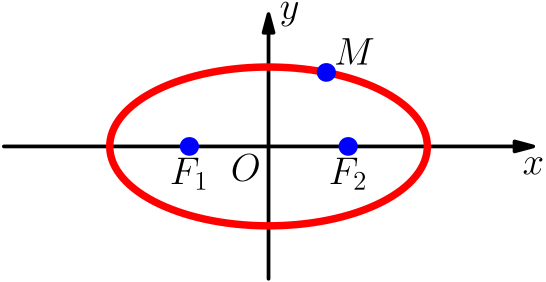
Пусть фокусы эллипса F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O, и пусть расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка эллипса,

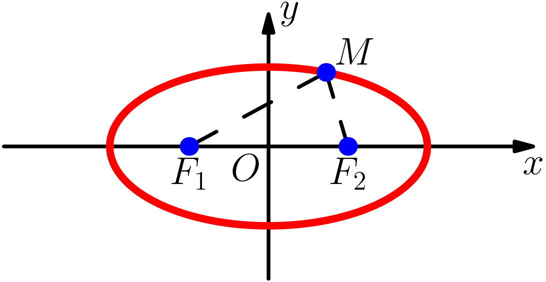
Эллипс



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка эллипса,

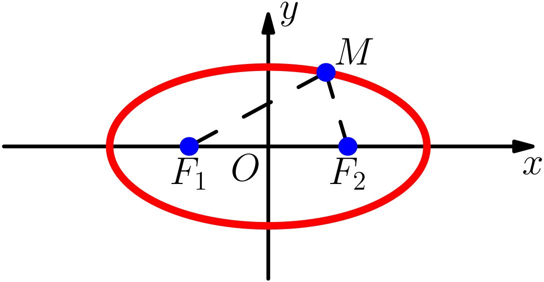
Эллипс



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка эллипса,

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$



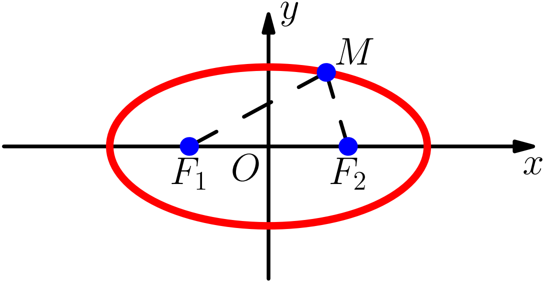
$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка эллипса,

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

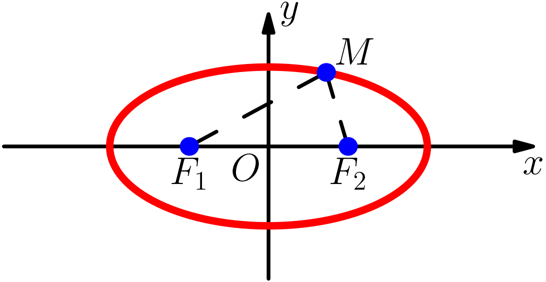
и по определению эллипса $2a > 2c$.

Эллипс



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

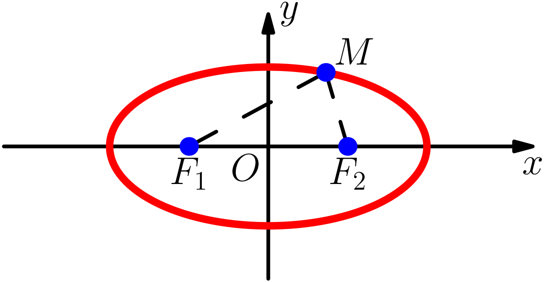
По формуле расстояния между двумя точками



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

По формуле расстояния между двумя точками

$$MF_1 = |\overrightarrow{MF_1}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$



$F_1(-c, 0)$

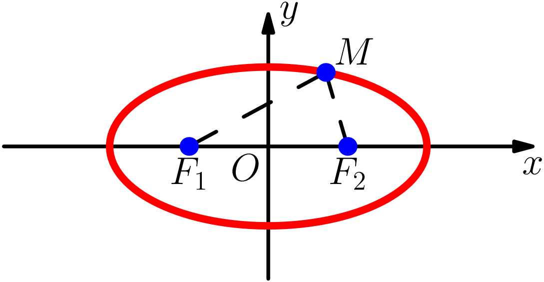
$F_2(c, 0)$

$M(x, y)$

По формуле расстояния между двумя точками

$$MF_1 = |\overrightarrow{MF_1}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$MF_2 = |\overrightarrow{MF_2}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

По формуле расстояния между двумя точками

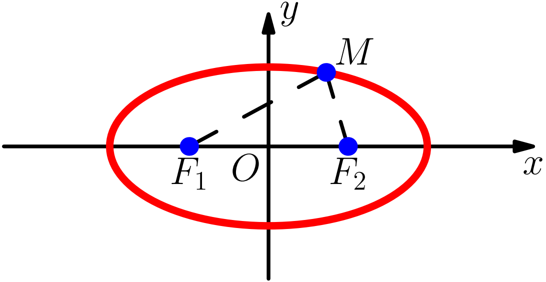
$$MF_1 = |\overrightarrow{MF_1}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$MF_2 = |\overrightarrow{MF_2}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Тогда из равенства $MF_1 + MF_2 = 2a$ получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

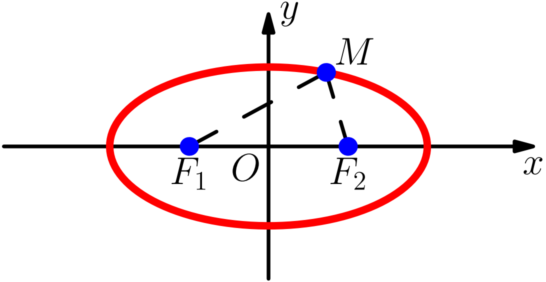
Эллипс



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

Перенеся второе слагаемое в левой части последнего равенства в правую часть и возведя обе части в квадрат,

Эллипс

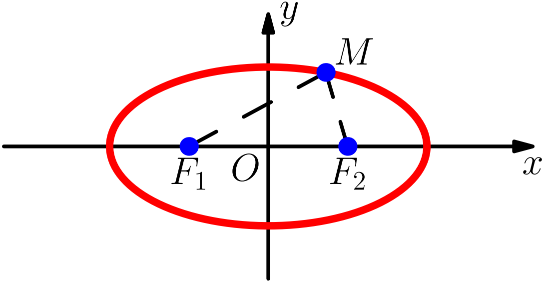


$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

Перенеся второе слагаемое в левой части последнего равенства в правую часть и возведя обе части в квадрат, получим

$$a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

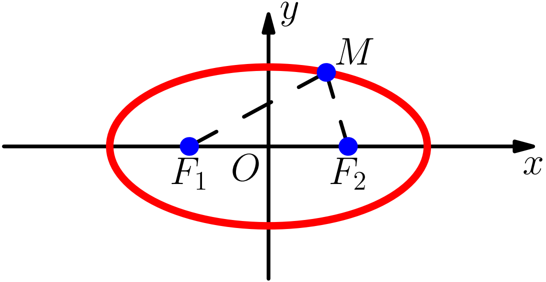
Эллипс



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

Еще раз возведем обе части получившегося равенства в квадрат и разделим на $a^2(a^2 - c^2)$:

Эллипс

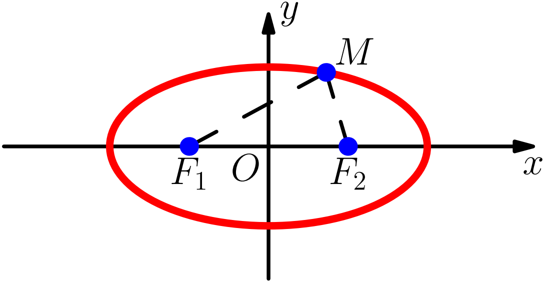


$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

Еще раз возведем обе части получившегося равенства в квадрат и разделим на $a^2(a^2 - c^2)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

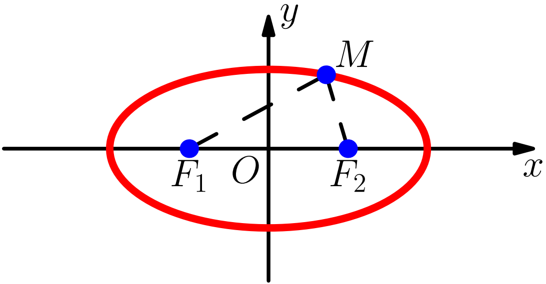
Эллипс



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

Полагая $a^2 - c^2 = b^2$,

Эллипс



$F_1(-c, 0)$

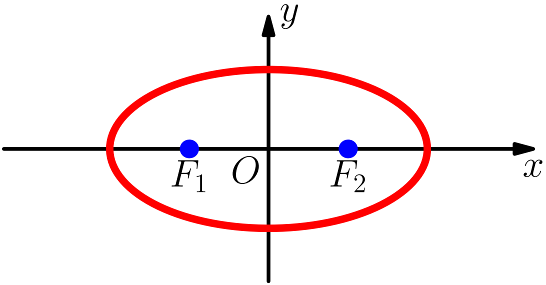
$F_2(c, 0)$

$M(x, y)$

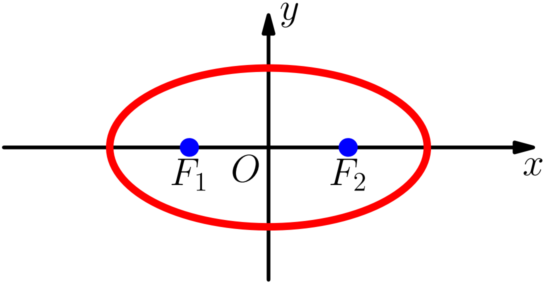
Полагая $a^2 - c^2 = b^2$, придем к **каноническому уравнению эллипса**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эллипс

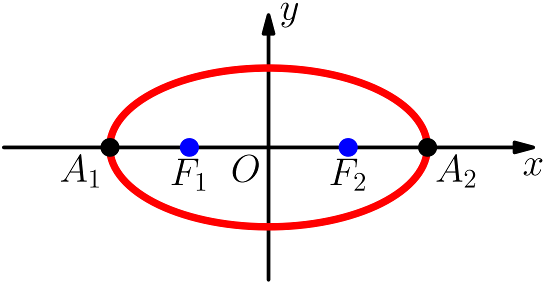


Эллипс



Точка O – **центр эллипса**.

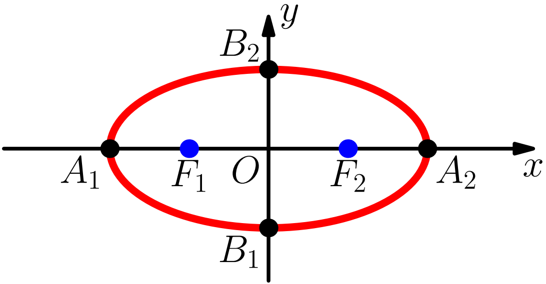
Эллипс



Точка O – **центр эллипса**.

Точки A_1, A_2

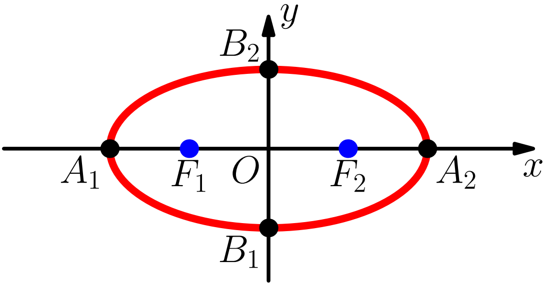
Эллипс



Точка O – **центр эллипса**.

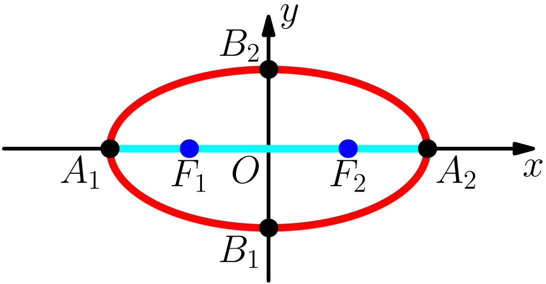
Точки A_1, A_2 и B_1, B_2

Эллипс

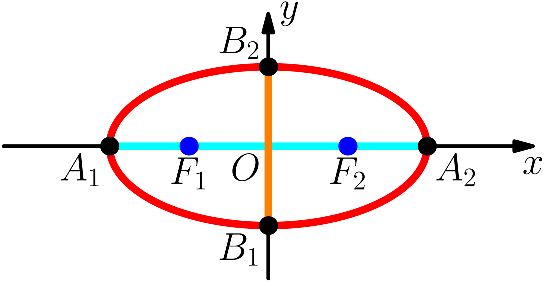


Точка O – **центр эллипса**.

Точки A_1, A_2 и B_1, B_2 – **вершины эллипса**.

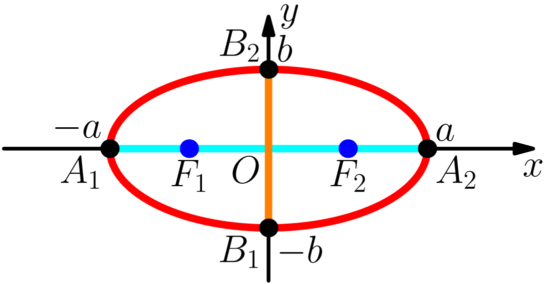


Отрезок A_1A_2 – **большая ось эллипса**.



Отрезок A_1A_2 – **большая ось эллипса**.

Отрезок B_1B_2 – **малая ось эллипса**.

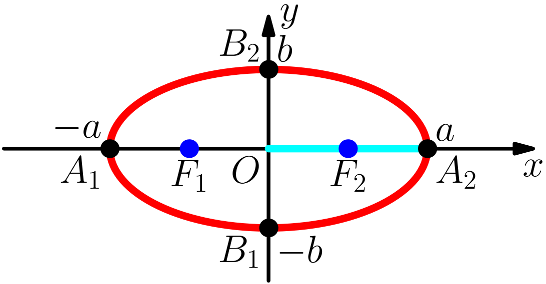


$A_1(-a, 0)$
$A_2(a, 0)$
$B_1(0, -b)$
$B_2(0, b)$

Отрезок A_1A_2 – **большая ось эллипса**.

Отрезок B_1B_2 – **малая ось эллипса**.

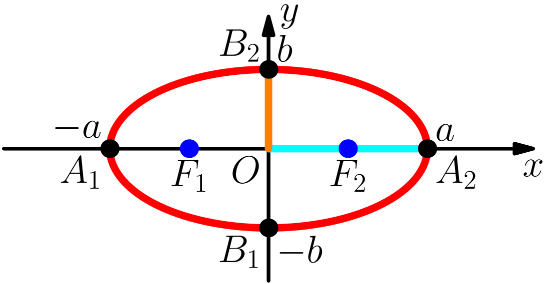
$$A_1A_2 = 2a,\ B_1B_2 = 2b$$



$A_1(-a, 0)$
$A_2(a, 0)$
$B_1(0, -b)$
$B_2(0, b)$

Отрезок OA_2 – **большая полуось эллипса**.

Эллипс

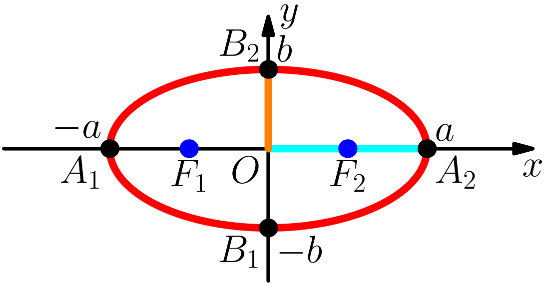


$A_1(-a, 0)$
$A_2(a, 0)$
$B_1(0, -b)$
$B_2(0, b)$

Отрезок OA_2 – **большая полуось эллипса**.

Отрезок OB_2 – **малая полуось эллипса**.

Эллипс

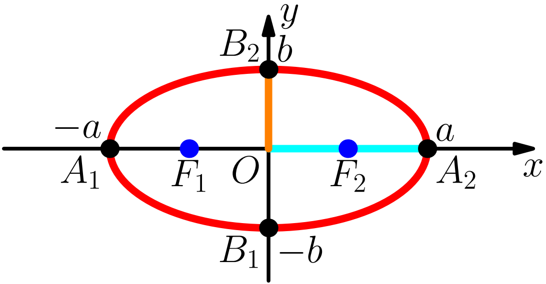


$A_1(-a, 0)$
$A_2(a, 0)$
$B_1(0, -b)$
$B_2(0, b)$

Отрезок OA_2 – **большая полуось эллипса**.

Отрезок OB_2 – **малая полуось эллипса**.

$$OA_2 = a,\ OB_2 = b$$



$A_1(-a,0)$
$A_2(a,0)$
$B_1(0,-b)$
$B_2(0,b)$

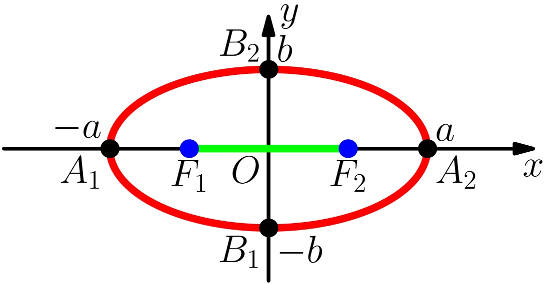
Отрезок OA_2 – **большая полуось эллипса**.

Отрезок OB_2 – **малая полуось эллипса**.

$$OA_2 = a,\ OB_2 = b$$

Числа a и b также часто называют **большой и малой полуосями эллипса**.

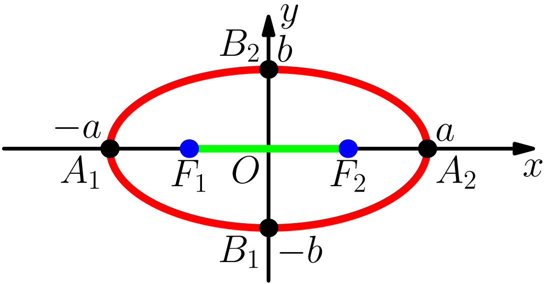
Эллипс



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

Расстояние между фокусами F_1 и F_2 называется **фокальным (фокусным) расстоянием эллипса**.

Эллипс

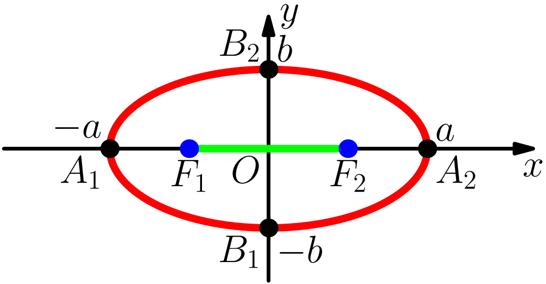


$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

Расстояние между фокусами F_1 и F_2 называется **фокальным (фокусным) расстоянием эллипса**.

$$F_1F_2 = 2c$$

Эллипс

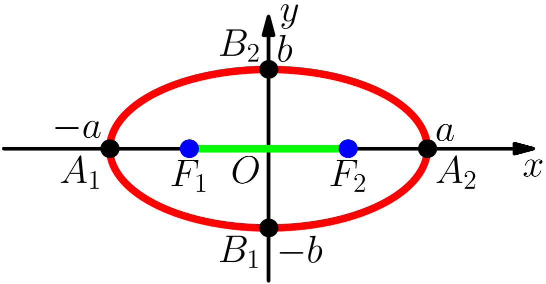


$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

Расстояние между фокусами F_1 и F_2 называется **фокальным (фокусным) расстоянием эллипса**.

$$F_1F_2 = 2c$$

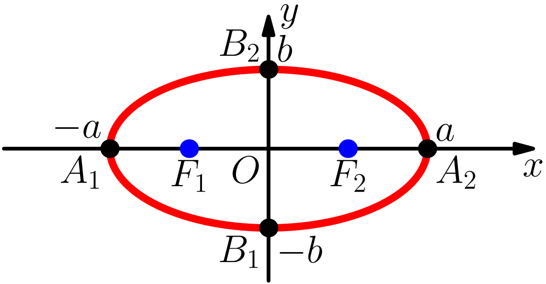
Число c – **полуфокусное расстояние**.



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

Ось, на которой лежат фокусы, есть **фокальная ось эллипса**.

Эллипс

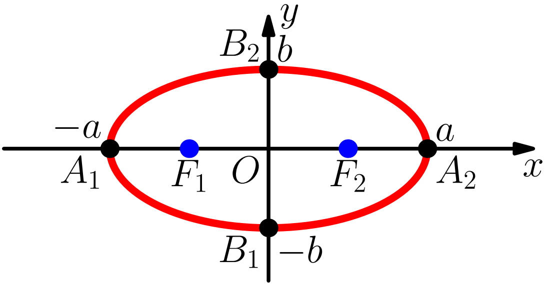


$F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$

Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом эллипса**,

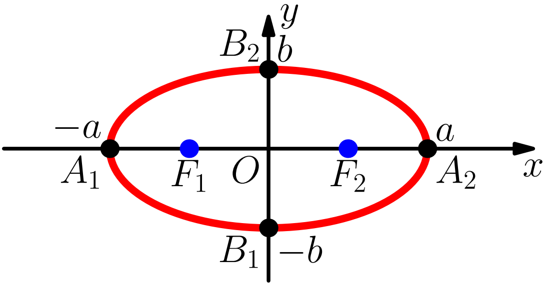
Эллипс



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом эллипса**, $0 \le \varepsilon < 1$.

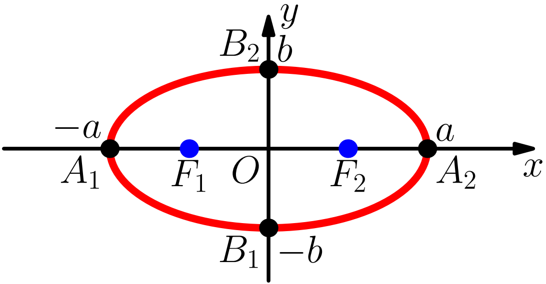
Эллипс



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

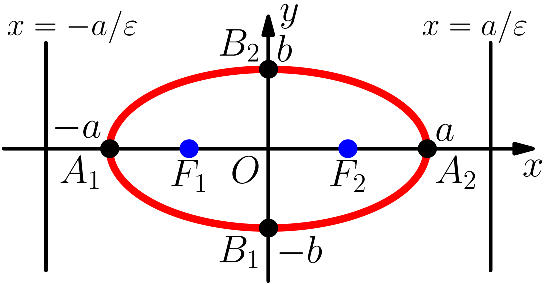
Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом эллипса**, $0 \leq \varepsilon < 1$.
Когда $\varepsilon = 0$ $(b = a)$, эллипс становится окружностью.

Эллипс



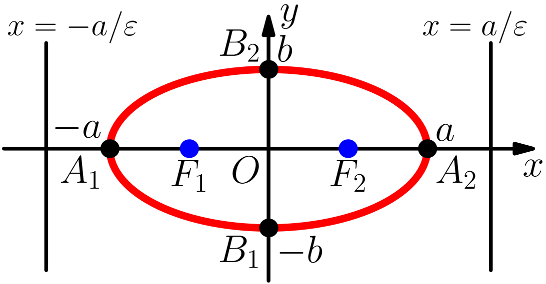
$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом эллипса**, $0 \leq \varepsilon < 1$. Когда $\varepsilon = 0$ $(b = a)$, эллипс становится окружностью. Чем больше ε, тем более сплющенным будет эллипс.

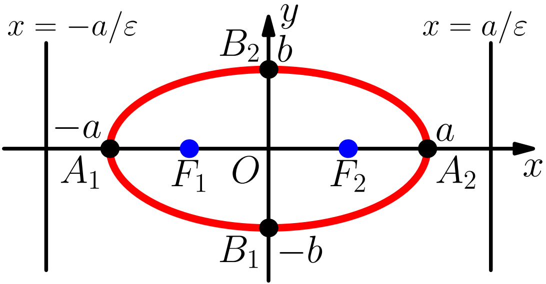


Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются **директрисами эллипса**.

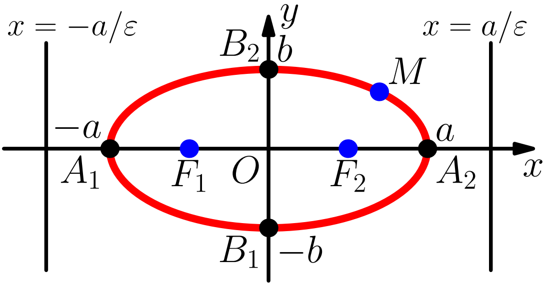
Эллипс



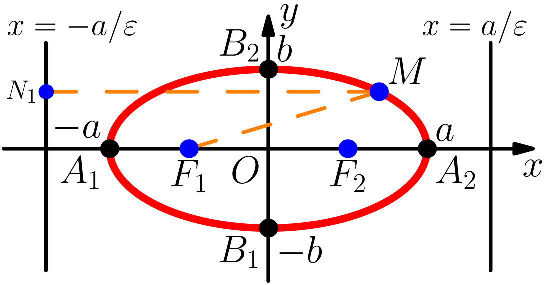
Их свойство – отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к аналогичному расстоянию до директрисы, лежащей по ту же сторону от центра O, что и фокус, есть величина постоянная, равная эксцентриситету.



т.е.

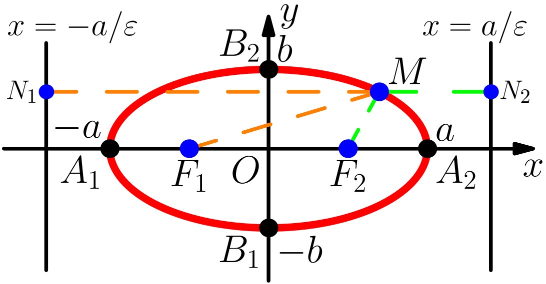


т.е.



т.е.

$$MF_1/MN_1 = \varepsilon,$$



т.е.

$$MF_1/MN_1 = \varepsilon,\ MF_2/MN_2 = \varepsilon.$$

Если фокусы эллипса $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy,

Эллипс

Если фокусы эллипса $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy, то большая ось эллипса длиной $2b$ лежит на оси Oy, Если фокусы эллипса $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy, то большая ось эллипса длиной $2b$ лежит на оси Oy, малая ось длиной $2a$ – на оси Ox,

Эллипс

Если фокусы эллипса $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy, то большая ось эллипса длиной $2b$ лежит на оси Oy, малая ось длиной $2a$ – на оси Ox,

$$a < b,$$

Эллипс

Если фокусы эллипса $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy, то большая ось эллипса длиной $2b$ лежит на оси Oy, малая ось длиной $2a$ – на оси Ox,

$$a < b,\ b^2 - c^2 = a^2$$

Эллипс

Если фокусы эллипса $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy, то большая ось эллипса длиной $2b$ лежит на оси Oy, малая ось длиной $2a$ – на оси Ox,

$$a < b,\ b^2 - c^2 = a^2 \text{ и } \varepsilon = c/b.$$

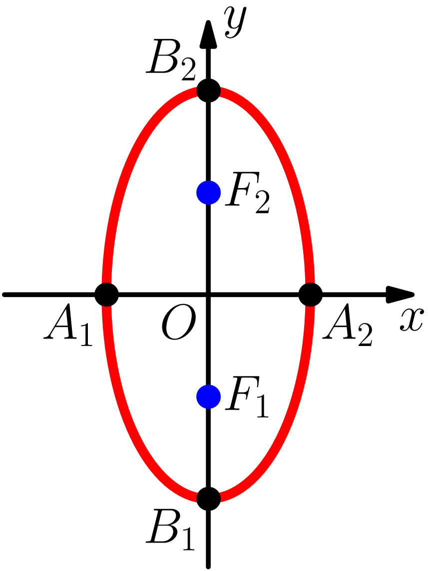
Эллипс

Если фокусы эллипса $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy, то большая ось эллипса длиной $2b$ лежит на оси Oy, малая ось длиной $2a$ – на оси Ox,

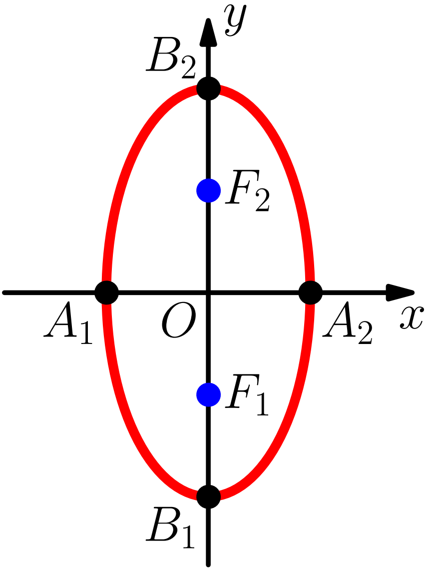
$$a < b,\ b^2 - c^2 = a^2 \text{ и } \varepsilon = c/b.$$

Уравнение эллипса не меняется.

Эллипс

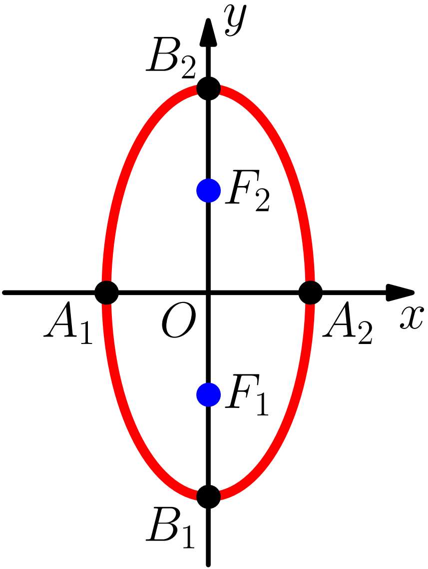


Эллипс

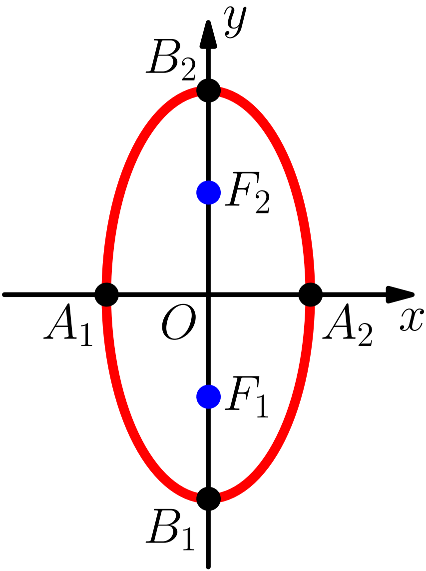


$A_1(-a, 0)$
$A_2(a, 0)$

Эллипс



$A_1(-a, 0)$
$A_2(a, 0)$
$B_1(0, -b)$
$B_2(0, b)$



$A_1(-a, 0)$
$A_2(a, 0)$
$B_1(0, -b)$
$B_2(0, b)$
$F_1(0, -c)$
$F_2(0, c)$

Эллипс

К кривым второго порядка эллиптического типа относятся также

К кривым второго порядка эллиптического типа относятся также

мнимый эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

К кривым второго порядка эллиптического типа относятся также
мнимый эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

и **точка**

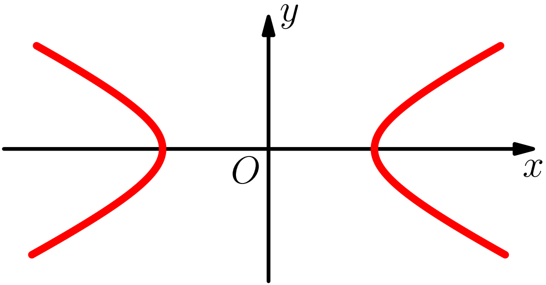
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Гипербола

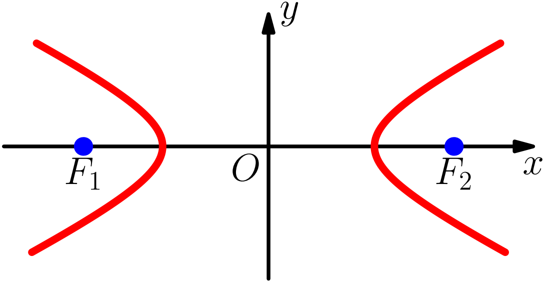
Определение

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, причем эта величина меньше, чем расстояние между фокусами.

Гипербола

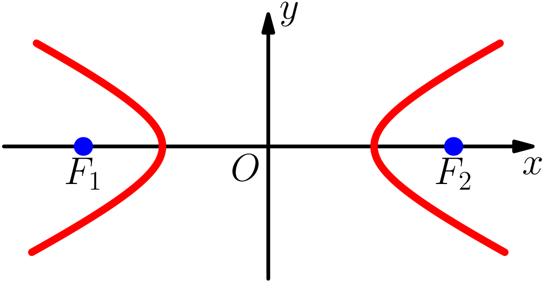


Гипербола



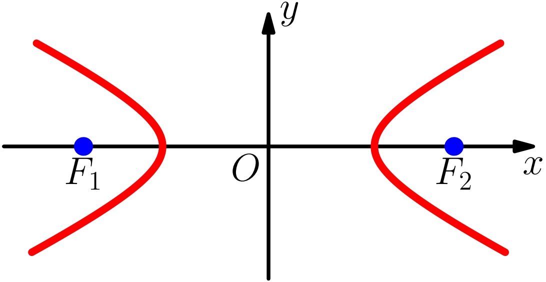
Пусть фокусы гиперболы F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O,

Гипербола



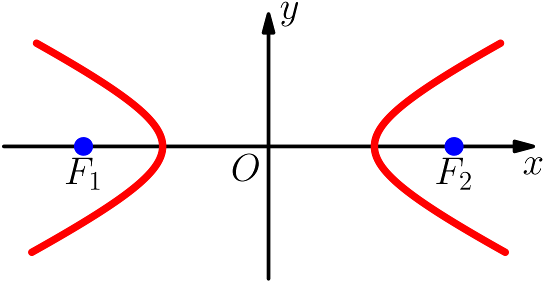
Пусть фокусы гиперболы F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O, и пусть расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$.

Гипербола



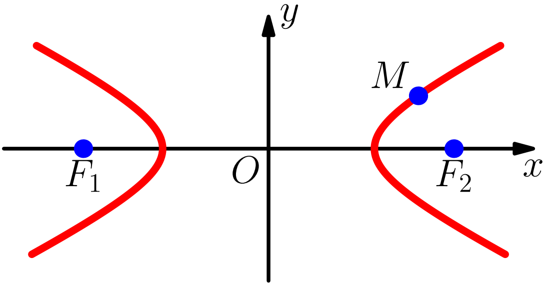
Пусть фокусы гиперболы F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O, и пусть расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Гипербола



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

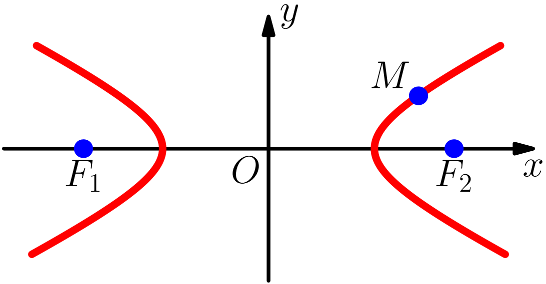
Пусть фокусы гиперболы F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O, и пусть расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка гиперболы,

Гипербола



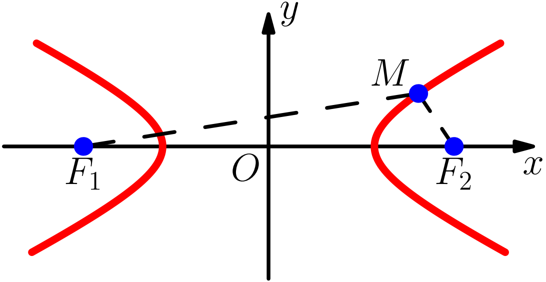
$F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$

$M(x, y)$

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка гиперболы,

Гипербола

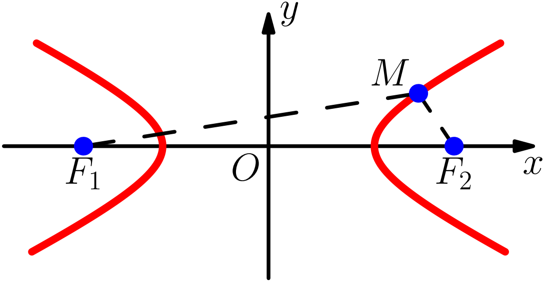


$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка гиперболы,

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

Гипербола



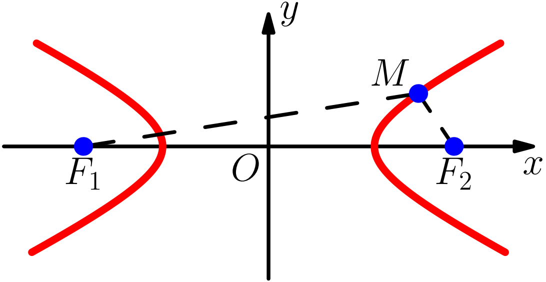
$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка гиперболы,

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

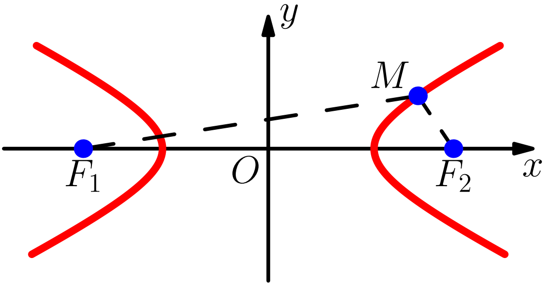
и по определению гиперболы $2a < 2c$.

Гипербола



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

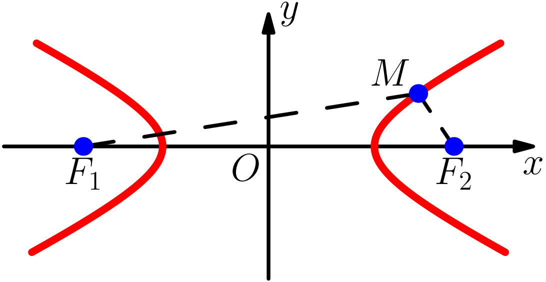
Используя формулу расстояния между двумя точками и раскрывая знак модуля,



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

Используя формулу расстояния между двумя точками и раскрывая знак модуля, из равенства $|MF_1 - MF_2| = 2a$ получаем

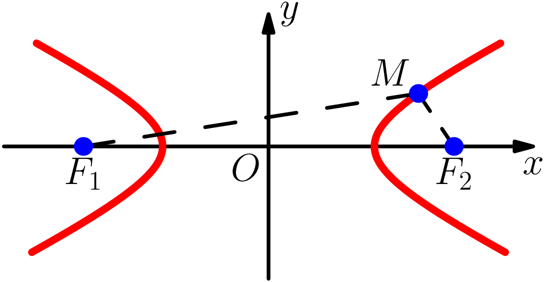
Гипербола



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

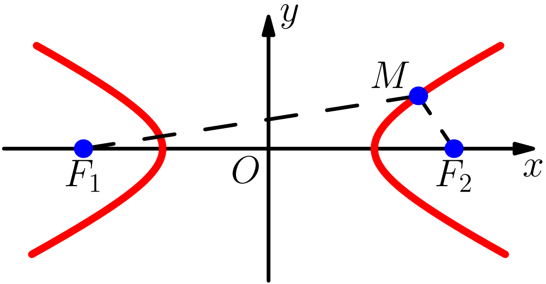
Используя формулу расстояния между двумя точками и раскрывая знак модуля, из равенства $|MF_1 - MF_2| = 2a$ получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

После преобразований, как это было сделано при выводе уравнения эллипса,



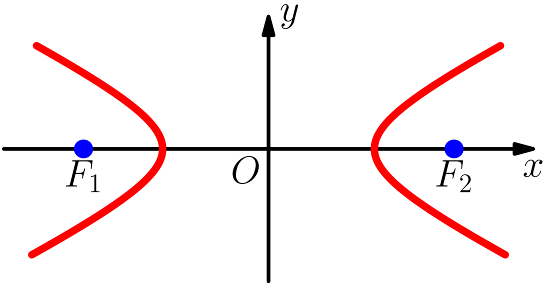
$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$
$M(x, y)$

После преобразований, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим **каноническое уравнение гиперболы**

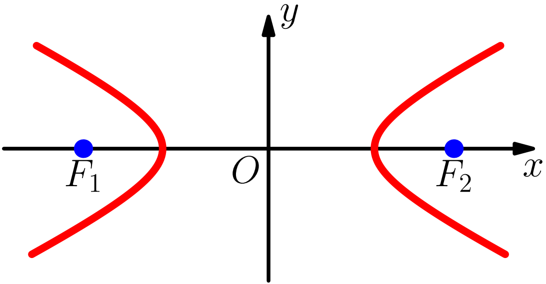
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a^2 + b^2 = c^2$.

Гипербола

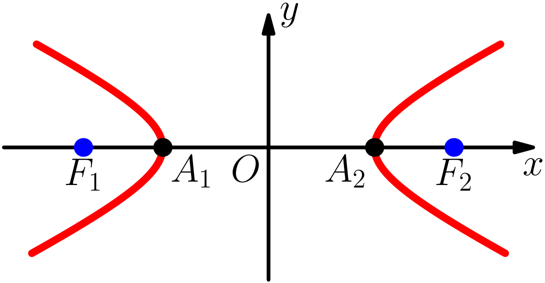


Гипербола



Точка O – **центр гиперболы**.

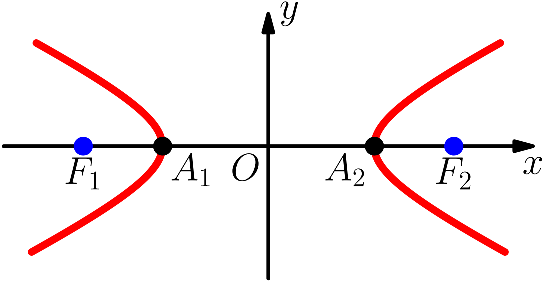
Гипербола



Точка O – **центр гиперболы**.

Точки A_1 и A_2 – **вершины гиперболы**.

Гипербола

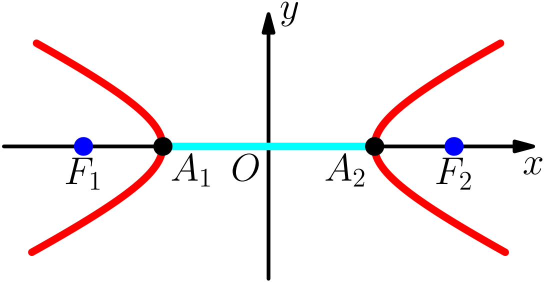


Точка O – **центр гиперболы**.

Точки A_1 и A_2 – **вершины гиперболы**.

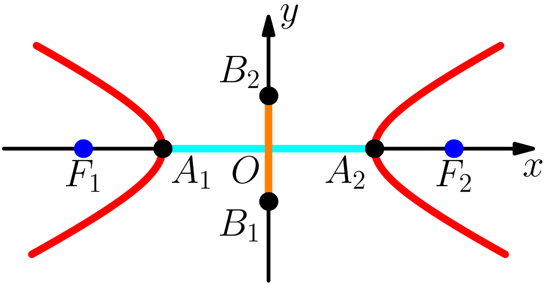
Гипербола не пересекает ось Oy.

Гипербола



Отрезок A_1A_2 – **действительная ось гиперболы**.

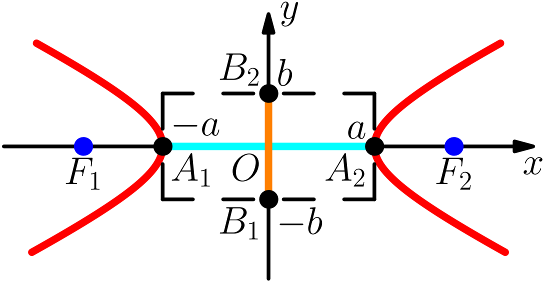
Гипербола



Отрезок A_1A_2 – **действительная ось гиперболы**.

Отрезок B_1B_2 – **мнимая ось гиперболы**.

Гипербола



$A_1(-a, 0)$

$A_2(a, 0)$

$B_1(0, -b)$

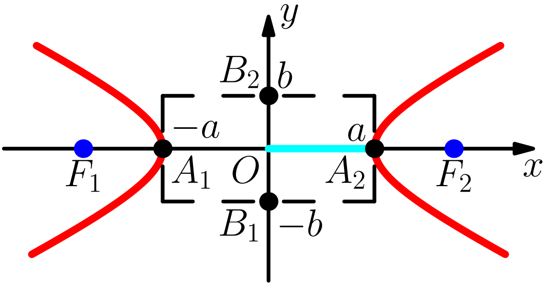
$B_2(0, b)$

Отрезок A_1A_2 – **действительная ось гиперболы**.

Отрезок B_1B_2 – **мнимая ось гиперболы**.

$$A_1A_2 = 2a,\ B_1B_2 = 2b$$

Гипербола



$A_1(-a, 0)$

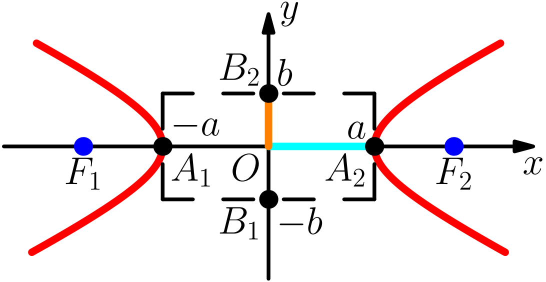
$A_2(a, 0)$

$B_1(0, -b)$

$B_2(0, b)$

Отрезок OA_2 – **действительная полуось гиперболы**.

Гипербола

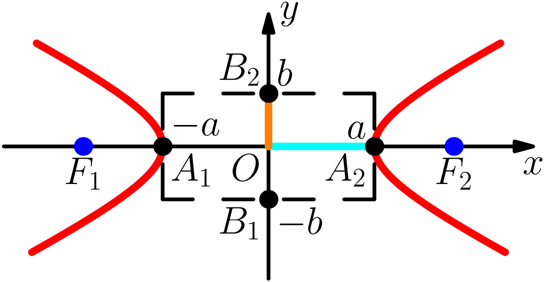


$A_1(-a, 0)$
$A_2(a, 0)$
$B_1(0, -b)$
$B_2(0, b)$

Отрезок OA_2 – **действительная полуось гиперболы**.

Отрезок OB_2 – **мнимая полуось гиперболы**.

Гипербола



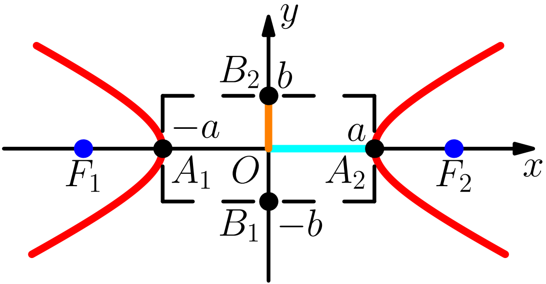
$A_1(-a, 0)$
$A_2(a, 0)$
$B_1(0, -b)$
$B_2(0, b)$

Отрезок OA_2 – **действительная полуось гиперболы**.

Отрезок OB_2 – **мнимая полуось гиперболы**.

$$OA_2 = a,\ OB_2 = b$$

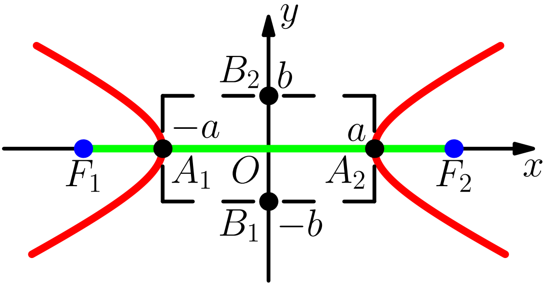
Гипербола



$A_1(-a, 0)$
$A_2(a, 0)$
$B_1(0, -b)$
$B_2(0, b)$

Числа a и b также часто называют **действительной и мнимой полуосями гиперболы**.

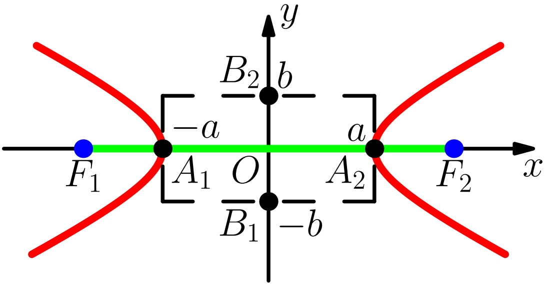
Гипербола



$F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$

Расстояние между фокусами F_1 и F_2 называется **фокусным (фокальным) расстоянием гиперболы**.

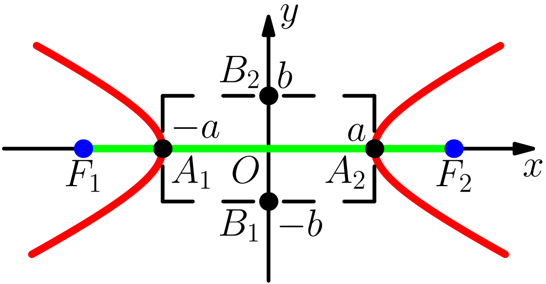


$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

Расстояние между фокусами F_1 и F_2 называется **фокусным (фокальным) расстоянием гиперболы**.

$$F_1F_2 = 2c$$

Гипербола



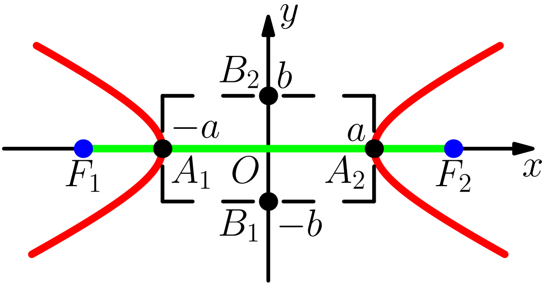
$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

Расстояние между фокусами F_1 и F_2 называется **фокусным (фокальным) расстоянием гиперболы**.

$$F_1F_2 = 2c$$

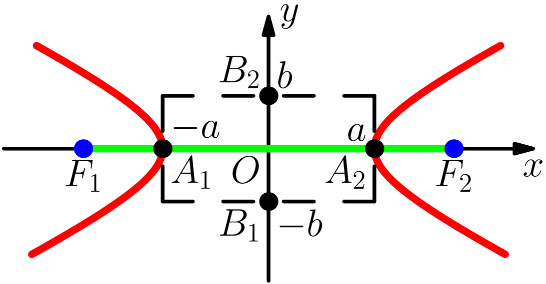
Число c – **полуфокусное расстояние**.

Гипербола



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

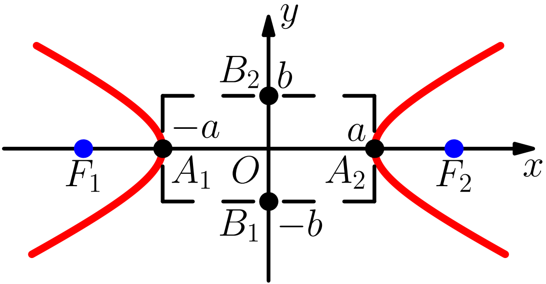
Ось, на которой лежат фокусы, есть **фокальная ось гиперболы**,



$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$

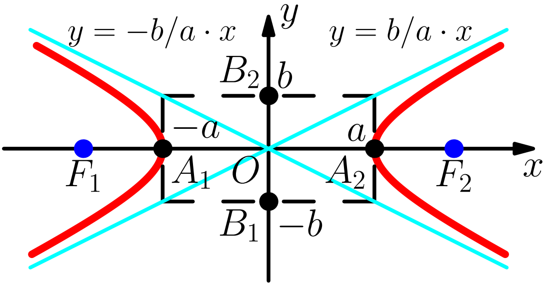
Ось, на которой лежат фокусы, есть **фокальная ось гиперболы**, причем фокусы всегда лежат на действительной оси.

Гипербола



При неограниченном удалении точек гиперболы от начала координат они неограниченно приближаются к прямым, проходящим через диагонали прямоугольника со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$,

Гипербола

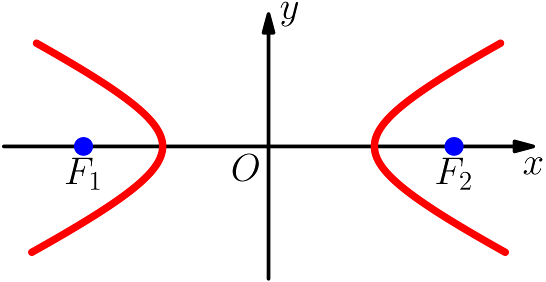


т.е. к прямым

$$y = \pm\frac{b}{a}x,$$

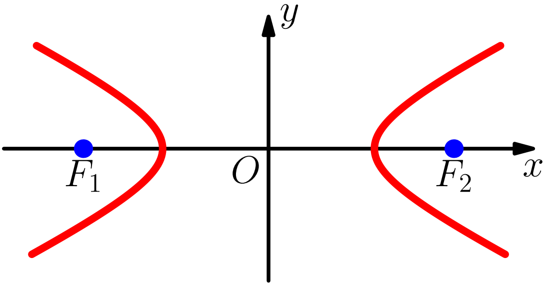
которые являются **асимптотами гиперболы**.

Гипербола



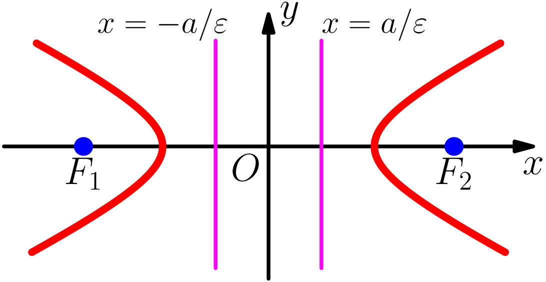
Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом гиперболы**,

Гипербола



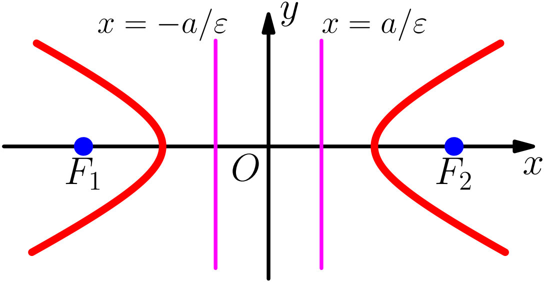
Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом гиперболы**, его возможные значения: $1 < \varepsilon < +\infty$.

Гипербола



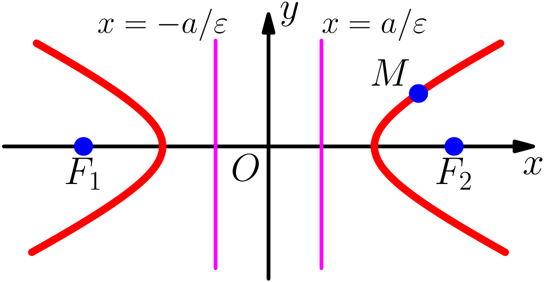
Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются **директрисами гиперболы**

Гипербола



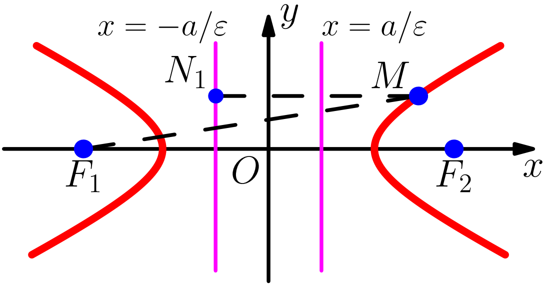
Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются **директрисами гиперболы** и обладают тем же свойством, что и у эллипса,

Гипербола



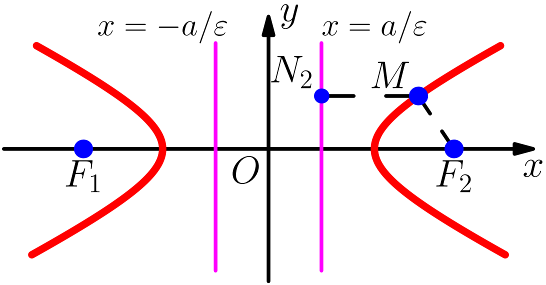
т.е. отношение расстояния от любой точки гиперболы до фокуса к аналогичному расстоянию до директрисы, лежащей по ту же сторону от центра O, что и фокус, есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Гипербола



$$MF_1/MN_1 = \varepsilon,$$

Гипербола



$$MF_1/MN_1 = \varepsilon,\ MF_2/MN_2 = \varepsilon$$

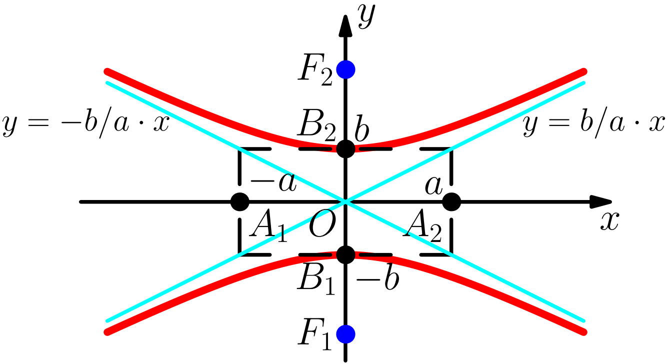
Гипербола

Уравнение

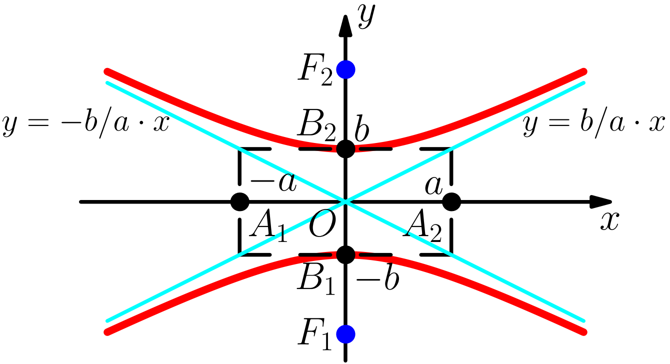
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

описывает **сопряженную гиперболу**.

Гипербола

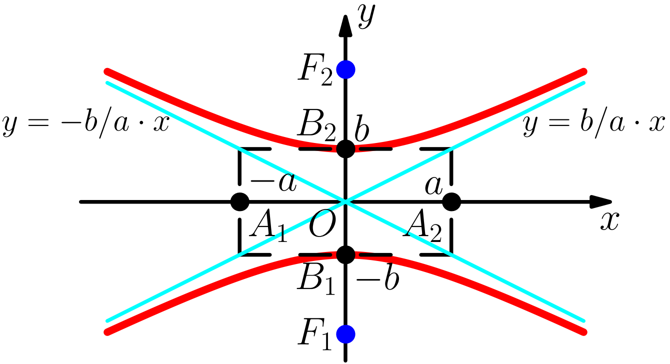


Гипербола



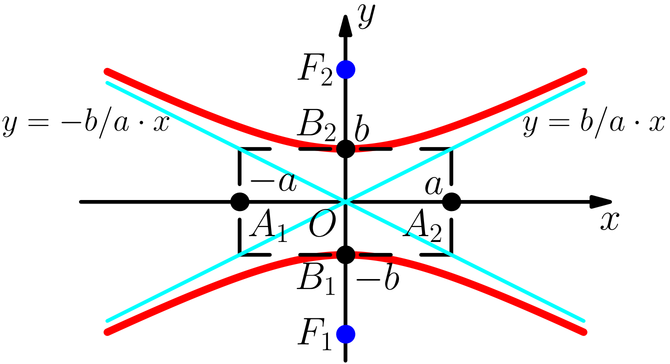
Действительная и мнимая оси обычной гиперболы являются, соответственно, мнимой и действительной осями сопряженной гиперболы,

Гипербола



Действительная и мнимая оси обычной гиперболы являются, соответственно, мнимой и действительной осями сопряженной гиперболы, а асимптоты у них общие.

Гипербола

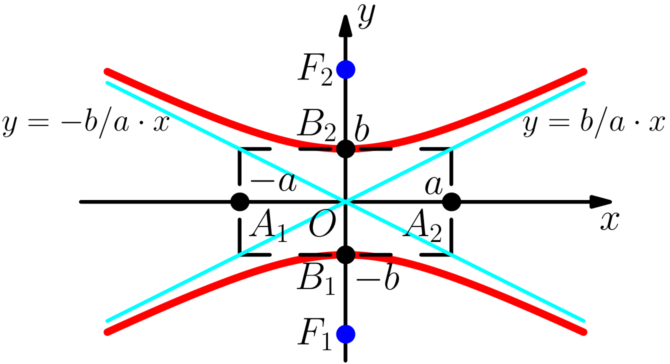


Фокусы сопряженной гиперболы

$$F_1(0, -c) \text{ и } F_2(0, c)$$

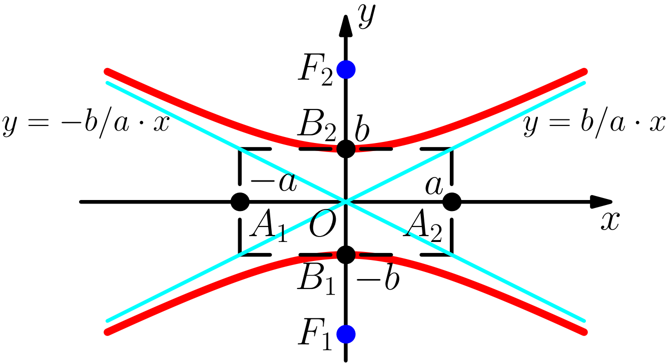
расположены на оси Oy,

Гипербола



эксцентриситет – $\varepsilon = \boldsymbol{c}/\boldsymbol{b}$,

Гипербола



эксцентриситет – $\varepsilon = \boldsymbol{c}/\boldsymbol{b}$,

уравнения директрис – $\boldsymbol{y} = \pm \boldsymbol{b}/\varepsilon$.

Гипербола

Если полуоси гиперболы равны ($a = b$), то гипербола называется **равносторонней**. Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2$$

К кривым второго порядка гиперболического типа относится также **пара пересекающихся прямых**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Парабола

Парабола

Определение

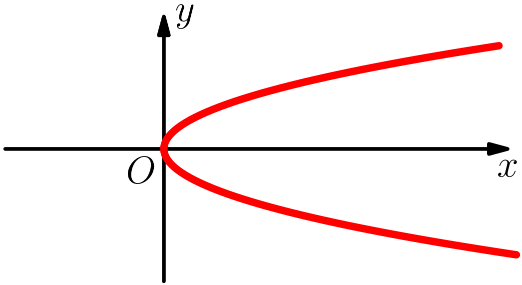
Параболой называется геометрическое место точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**.

Парабола

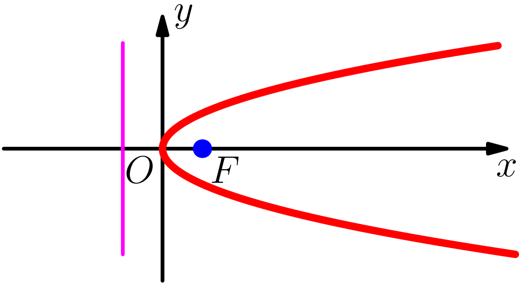
Определение

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**. Расстояние от фокуса до директрисы называется **параметром параболы** и обозначается p ($p > 0$).

Парабола

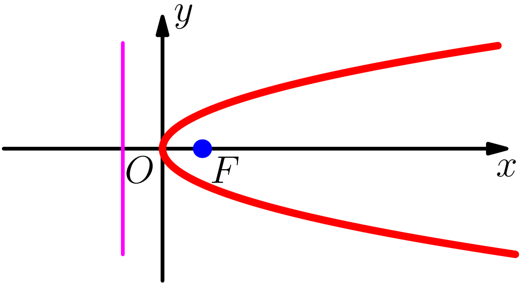


Парабола



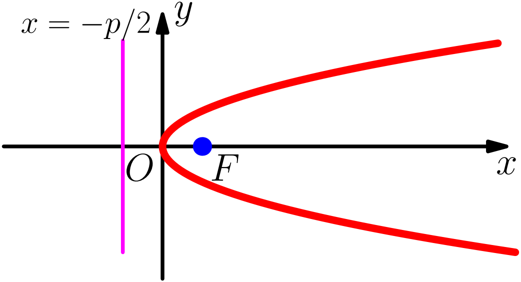
Расположим фокус параболы F на оси Ox, которая проходит перпендикулярно директрисе,

Парабола



Расположим фокус параболы F на оси Ox, которая проходит перпендикулярно директрисе, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой.

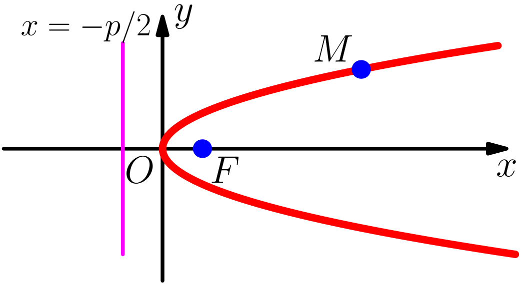
Парабола



$F(p/2, 0)$

Тогда имеем фокус $F(p/2, 0)$ и **уравнение директрисы** $x = -p/2$.

Парабола

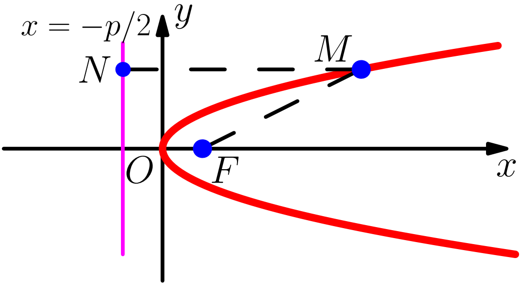


$F(p/2, 0)$

$M(x, y)$

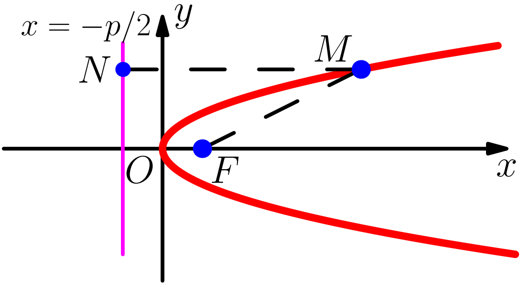
Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы.

Парабола



$F(p/2, 0)$
$M(x, y)$
$N(-p/2, y)$

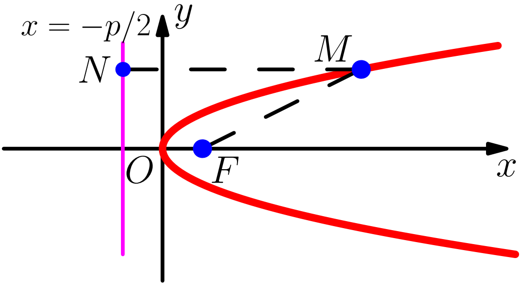
Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы.
Тогда по определению $MF = MN$.



$F(p/2, 0)$
$M(x, y)$
$N(-p/2, y)$

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы.
Тогда по определению $MF = MN$.
Откуда получаем

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

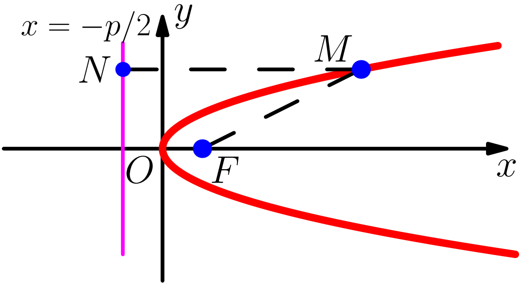


$F(p/2, 0)$
$M(x, y)$
$N(-p/2, y)$

После возведения обеих частей в квадрат получим **каноническое уравнение параболы**

$$y^2 = 2px.$$

Парабола

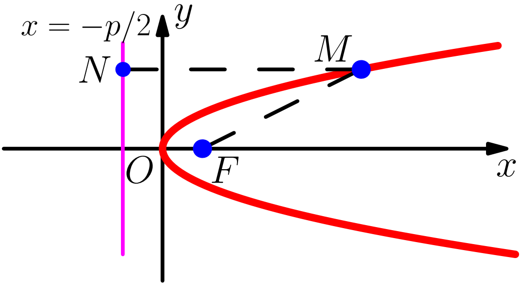


$F(p/2, 0)$
$M(x, y)$
$N(-p/2, y)$

Полагают, что **эксцентриситет параболы**

$$\varepsilon = 1.$$

Парабола

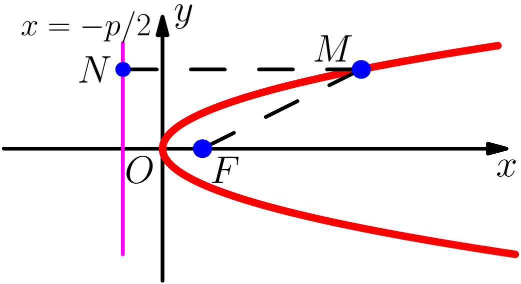


$F(p/2, 0)$
$M(x, y)$
$N(-p/2, y)$

Полагают, что **эксцентриситет параболы**

$$\varepsilon = 1.$$

Точку O называют **вершиной параболы**,



$F(p/2, 0)$
$M(x, y)$
$N(-p/2, y)$

Полагают, что **эксцентриситет параболы**

$$\varepsilon = 1.$$

Точку O называют **вершиной параболы**, а величину FM – **фокальным радиусом точки** M.

Парабола

Уравнения

Парабола

Уравнения $y^2 = -2px$,

Парабола

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$

Парабола

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ $(p > 0)$

Парабола

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ также определяют параболы.

Парабола

К кривым второго порядка параболического типа относятся также

Парабола

К кривым второго порядка параболического типа относятся также

$(y-c)^2=0$ - **пара совпадающих прямых**,

Парабола

К кривым второго порядка параболического типа относятся также

$(y-c)^2 = 0$ - **пара совпадающих прямых**,

$y^2 = c^2$ - **пара параллельных прямых**,

Парабола

К кривым второго порядка параболического типа относятся также

$(y-c)^2=0$ - **пара совпадающих прямых**,

$y^2=c^2$ - **пара параллельных прямых**,

$y^2=-c^2$ - **пара мнимых параллельных прямых.**