Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия

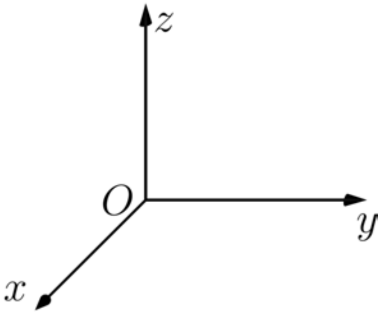
Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Комплексные числа и многочлены

Лекция 2.1

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

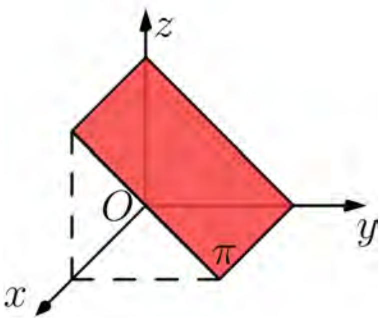
Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором



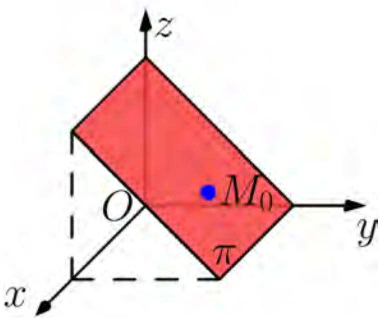
Пусть в пространстве заданы декартова прямоугольная система координат $Oxyz$

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором



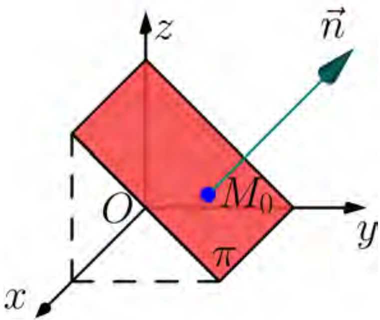
Пусть в пространстве заданы декартова прямоугольная система координат *Oxyz* и произвольная плоскость π.

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором



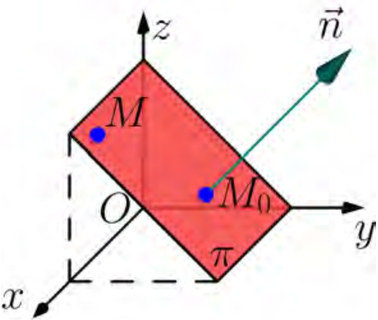
Известны лежащая в данной плоскости точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором



Известны лежащая в данной плоскости точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярный данной плоскости.

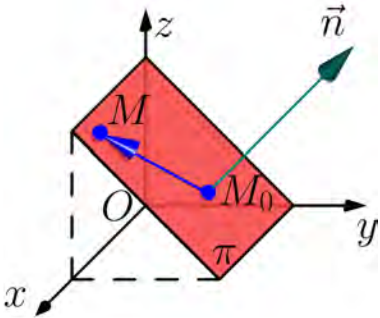
Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором



Выберем на плоскости π произвольную точку

$$M(x, y, z)$$

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором

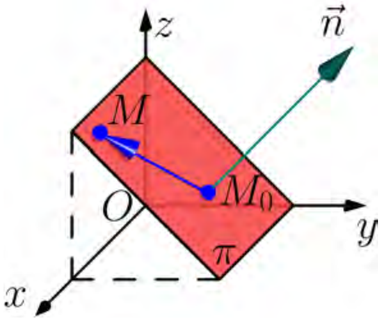


и проведем вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

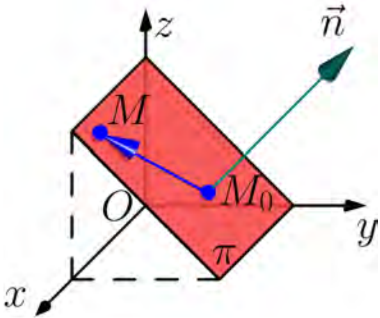
целиком лежащий в этой плоскости.

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором



Точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$,

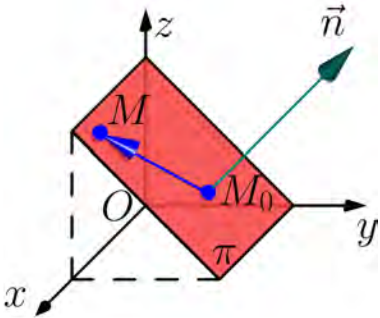
Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором



т.е. их скалярное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0.$$

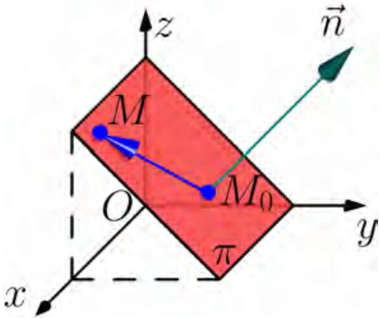
Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором



Отсюда получаем **уравнение плоскости с заданным нормальным вектором**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором



Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называют **нормальным вектором плоскости**.

Общее уравнение плоскости

Общее уравнение плоскости

Если в уравнении плоскости с заданным нормальным вектором раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то можно получить **общее уравнение плоскости**

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C - координаты нормального вектора плоскости.

Общее уравнение плоскости

Частные случаи:

Общее уравнение плоскости

Частные случаи:

(1) Если $D = 0$, то плоскость
$$Ax + By + Cz = 0$$
проходит через начало координат.

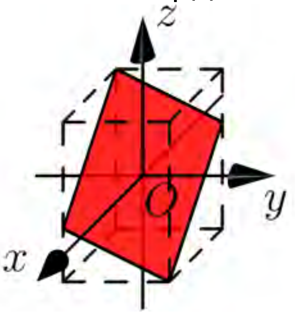
Общее уравнение плоскости

Частные случаи:

(1) Если $D = 0$, то плоскость

$$Ax + By + Cz = 0$$

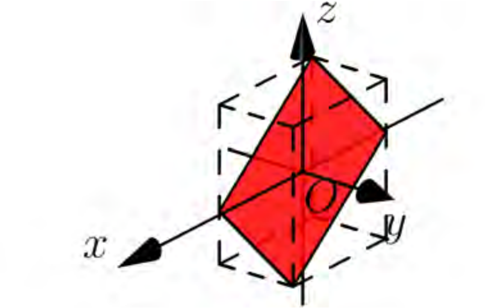
проходит через начало координат.



Общее уравнение плоскости

Частные случаи:

(1) Если $D = 0$, то плоскость
$$Ax + By + Cz = 0$$
проходит через начало координат.



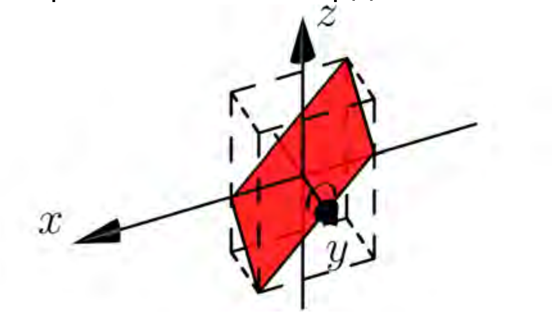
Общее уравнение плоскости

Частные случаи:

(1) Если $D = 0$, то плоскость

$$Ax + By + Cz = 0$$

проходит через начало координат.

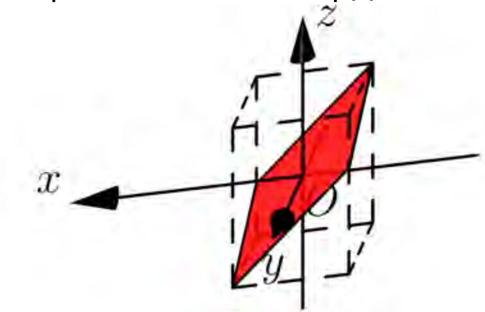


Частные случаи:

(1) Если $D = 0$, то плоскость

$$Ax + By + Cz = 0$$

проходит через начало координат.



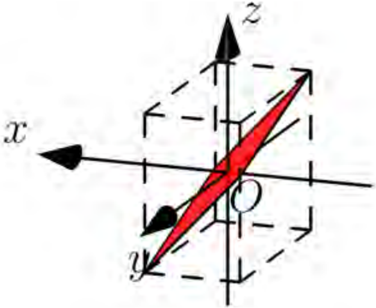
Общее уравнение плоскости

Частные случаи:

(1) Если $D = 0$, то плоскость

$$Ax + By + Cz = 0$$

проходит через начало координат.



Общее уравнение плоскости

Частные случаи:

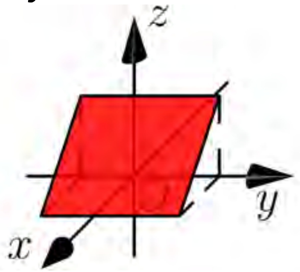
(2) Если $B = 0$, то плоскость
$$Ax + Cz + D = 0$$
параллельна оси Oy.

Частные случаи:

(2) Если $B = 0$, то плоскость

$$Ax + Cz + D = 0$$

параллельна оси Oy.



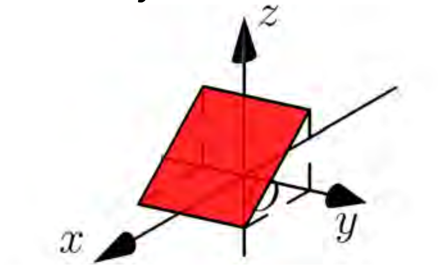
Общее уравнение плоскости

Частные случаи:

(2) Если $B = 0$, то плоскость

$$Ax + Cz + D = 0$$

параллельна оси Oy.

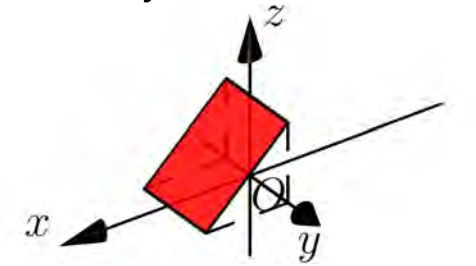


Частные случаи:

(2) Если $B = 0$, то плоскость

$$Ax + Cz + D = 0$$

параллельна оси Oy.

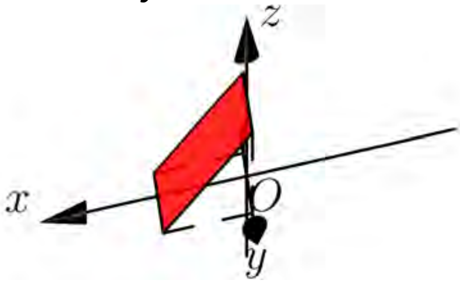


Частные случаи:

(2) Если $B = 0$, то плоскость

$$Ax + Cz + D = 0$$

параллельна оси Oy.

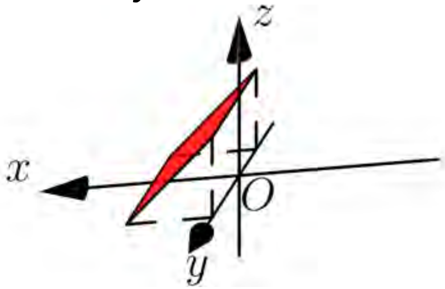


Частные случаи:

(2) Если $B = 0$, то плоскость

$$Ax + Cz + D = 0$$

параллельна оси Oy.



Общее уравнение плоскости

Частные случаи:

(3) Если $B = D = 0$, то плоскость
$$Ax + Cz = 0$$
проходит через ось Oy.

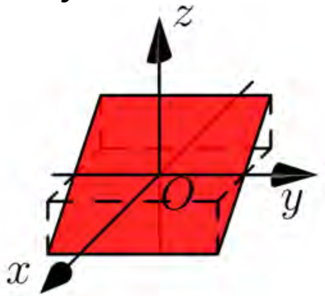
Общее уравнение плоскости

Частные случаи:

(3) Если $B = D = 0$, то плоскость

$$Ax + Cz = 0$$

проходит через ось Oy.



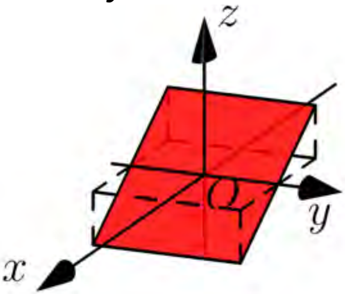
Общее уравнение плоскости

Частные случаи:

(3) Если $B = D = 0$, то плоскость

$$Ax + Cz = 0$$

проходит через ось Oy.

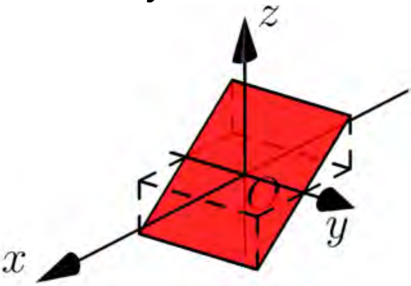


Частные случаи:

(3) Если $B = D = 0$, то плоскость

$$Ax + Cz = 0$$

проходит через ось Oy.

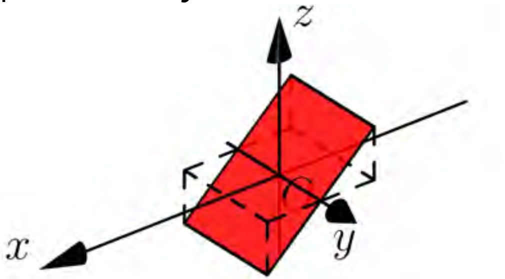


Частные случаи:

(3) Если $B = D = 0$, то плоскость

$$Ax + Cz = 0$$

проходит через ось Oy.

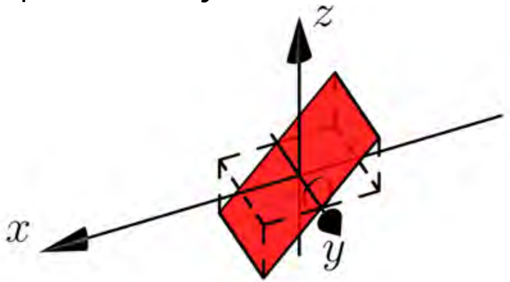


Частные случаи:

(3) Если $B = D = 0$, то плоскость

$$Ax + Cz = 0$$

проходит через ось Oy.



Общее уравнение плоскости

Частные случаи:

(4) Если $A = B = 0$, то плоскость

$$Cz + D = 0$$

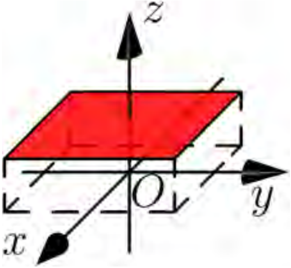
параллельна плоскости Oxy.

Частные случаи:

(4) Если $A = B = 0$, то плоскость

$$Cz + D = 0$$

параллельна плоскости Oxy.

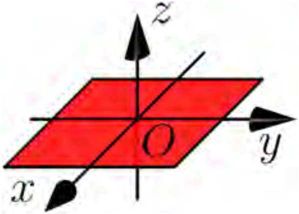


Частные случаи:

(5) Если $A = B = D = 0$, то получаем уравнение $z = 0$ плоскости Oxy.

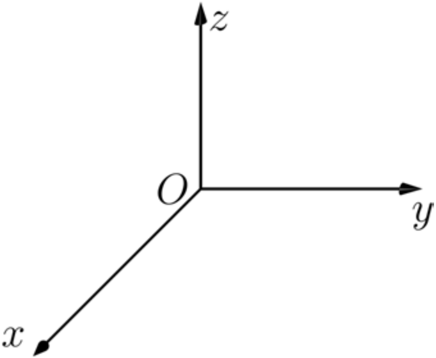
Частные случаи:

(5) Если $A = B = D = 0$, то получаем уравнение $z = 0$ плоскости Oxy.



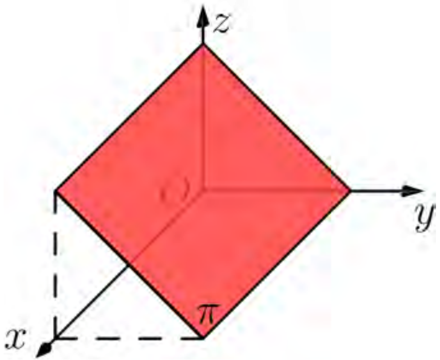
Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Уравнение плоскости, проходящей через три точки



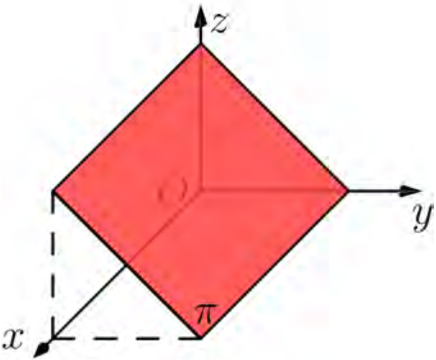
Пусть в пространстве заданы декартова прямоугольная система координат $Oxyz$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки



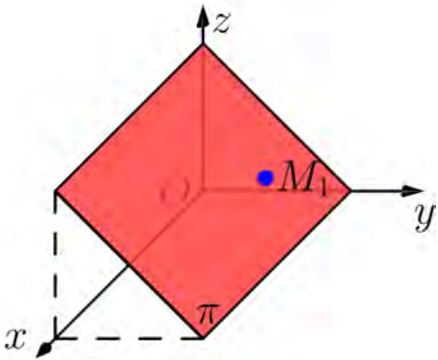
Пусть в пространстве заданы декартова прямоугольная система координат *Oxyz* и произвольная плоскость π.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки



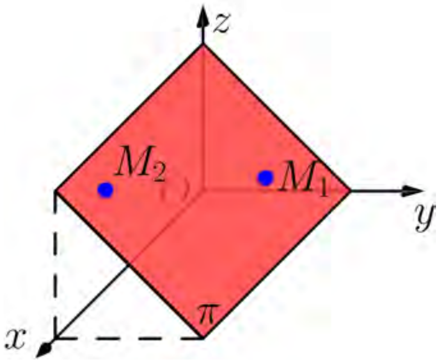
Известны лежащие в данной плоскости точки

Уравнение плоскости, проходящей через три точки



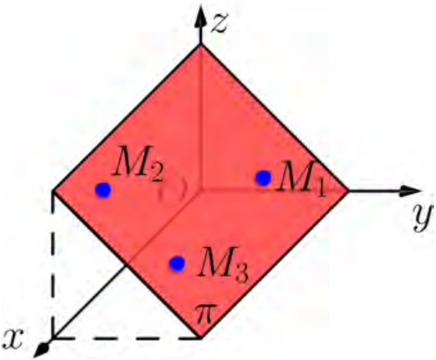
Известны лежащие в данной плоскости точки
$M_1(x_1, y_1, z_1)$,

Уравнение плоскости, проходящей через три точки



Известны лежащие в данной плоскости точки
$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$,

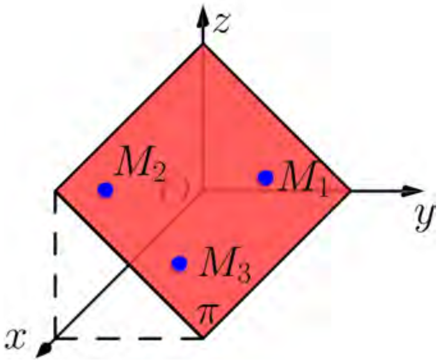
Уравнение плоскости, проходящей через три точки



Известны лежащие в данной плоскости точки

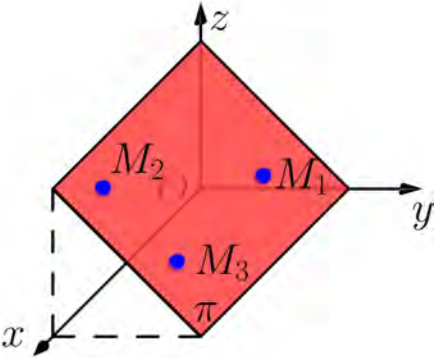
$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ \ M_3(x_3, y_3, z_3).$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки



$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$

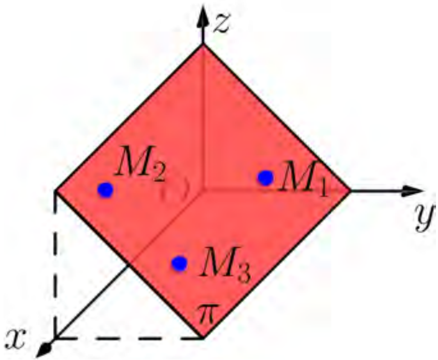
Уравнение плоскости, проходящей через три точки



$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость.

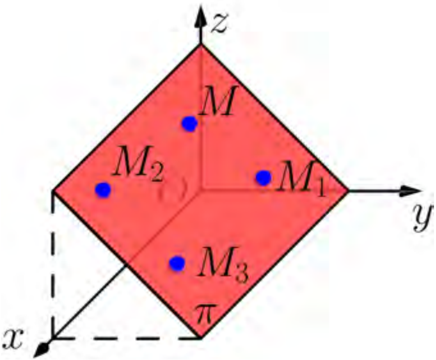
Уравнение плоскости, проходящей через три точки



$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение этой плоскости.

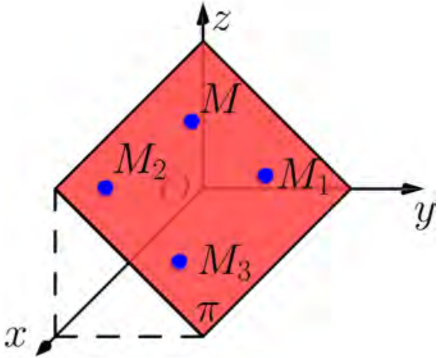
Уравнение плоскости, проходящей через три точки



$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$

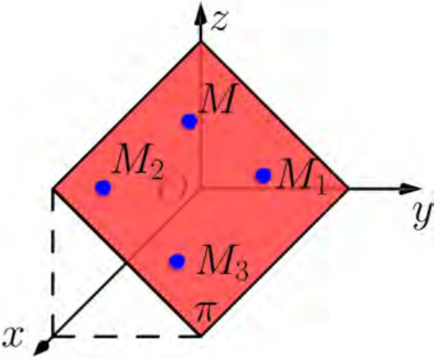
Пусть произвольная точка $M(x, y, z)$ лежит в плоскости π.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки



$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$
$M(x, y, z)$

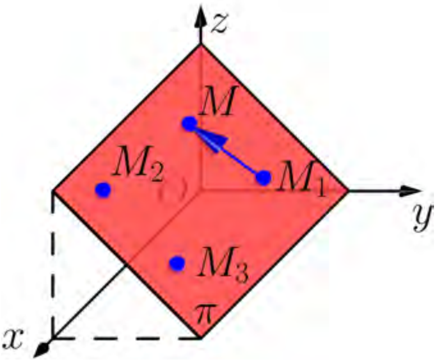
Уравнение плоскости, проходящей через три точки



$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$
$M(x, y, z)$

Составим векторы:

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

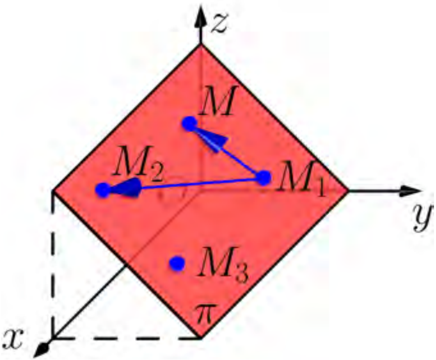


$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$
$M(x, y, z)$

Составим векторы:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

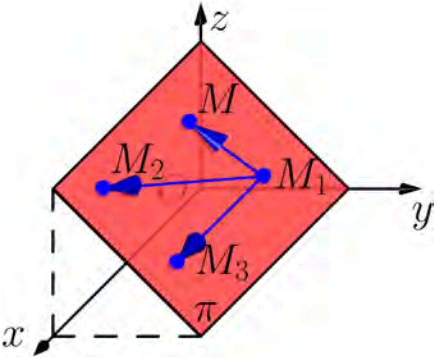


$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$
$M(x, y, z)$

Составим векторы:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

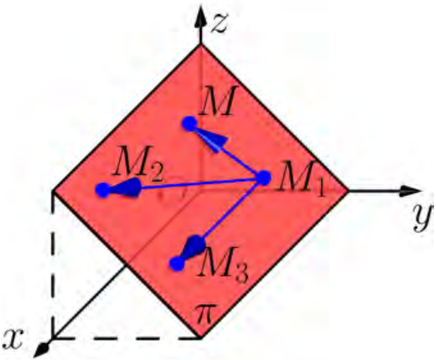


$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$
$M(x, y, z)$

Составим векторы:

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

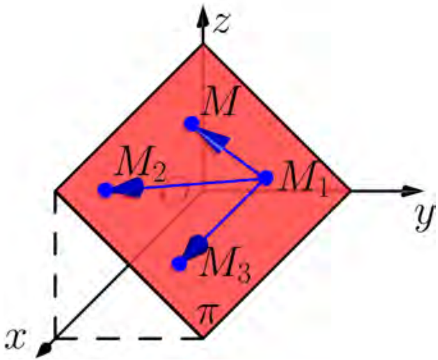
Уравнение плоскости, проходящей через три точки



$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$
$M(x, y, z)$

Эти векторы лежат на плоскости π тогда и только тогда, когда они компланарны,

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

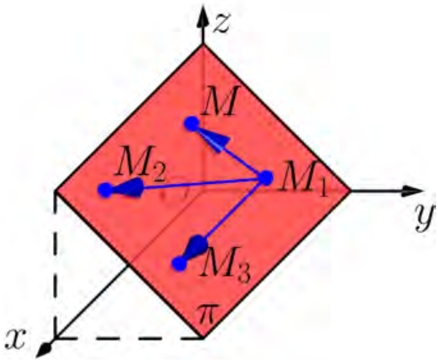


$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$
$M(x, y, z)$

т.е. их смешанное произведение равно нулю:

$$(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0.$$

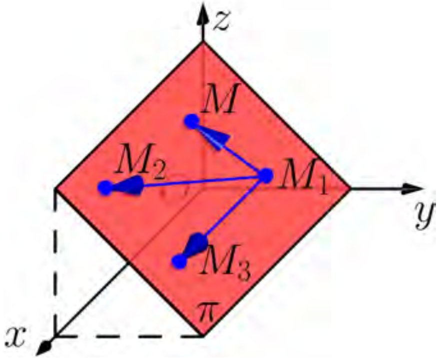
Уравнение плоскости, проходящей через три точки



$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$
$M(x, y, z)$

Записав это условие в координатной форме, получим **уравнение плоскости, проходящей через три точки**:

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

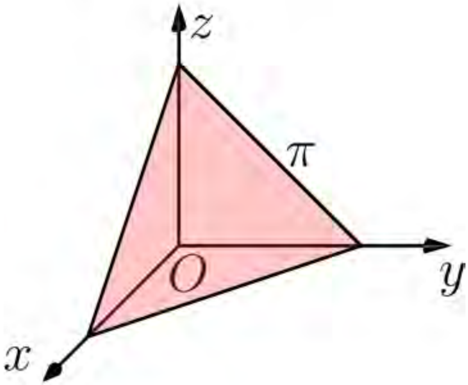


$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$
$M(x, y, z)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

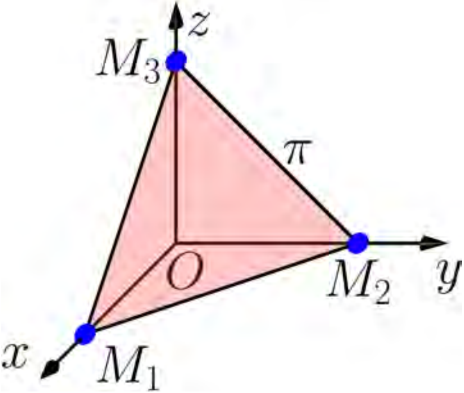
Уравнение плоскости в отрезках

Уравнение плоскости в отрезках



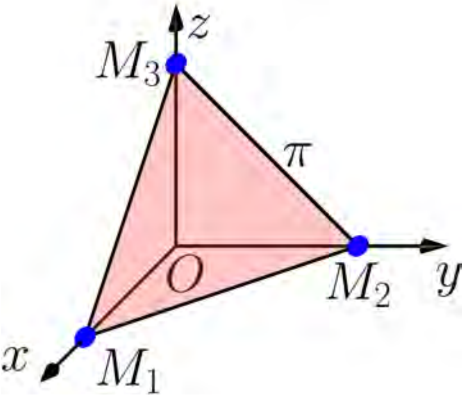
Рассмотрим плоскость π,

Уравнение плоскости в отрезках



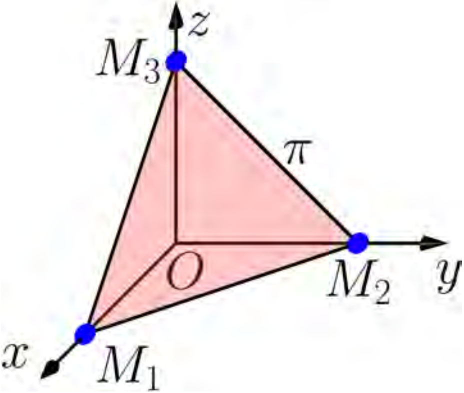
Рассмотрим плоскость π, проходящую через точки $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$ и $M_3(0, 0, c)$.

Уравнение плоскости в отрезках



Подставим координаты этих точек в уравнение плоскости, проходящей через три точки, и вычислим входящий в него определитель.

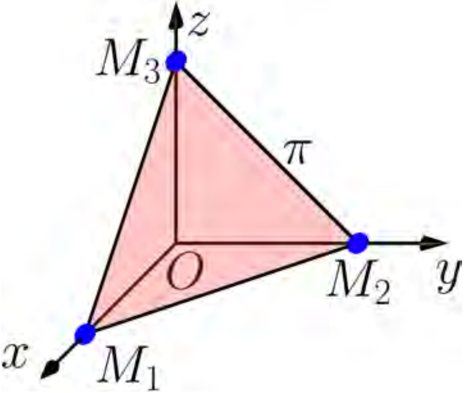
Уравнение плоскости в отрезках



Получим **уравнение плоскости в отрезках**

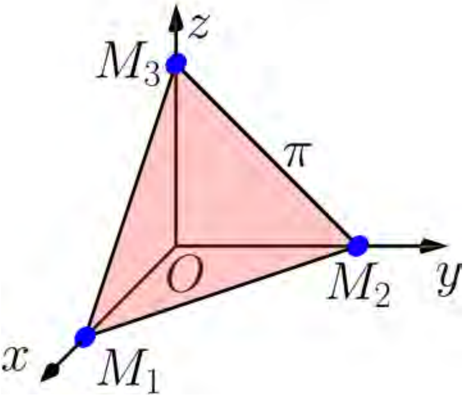
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

Уравнение плоскости в отрезках



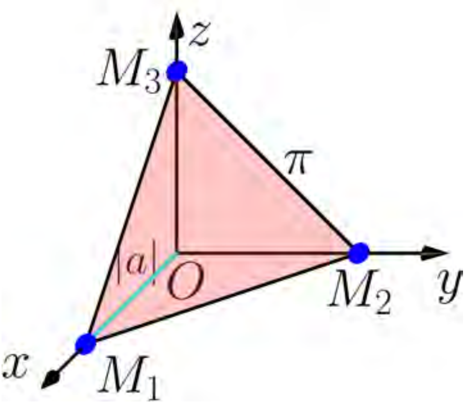
где *a*, *b* и *c* – действительные числа, абсолютные значения которых равны

Уравнение плоскости в отрезках



длинам отрезков OM_1, OM_2 и OM_3, отсекаемых плоскостью π на осях Ox, Oy и Oz, соответственно.

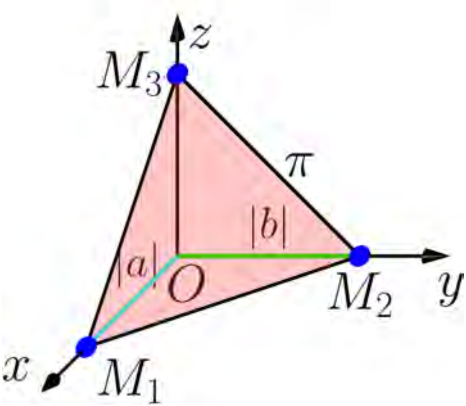
Уравнение плоскости в отрезках



$OM_1 = |a|$

длинам отрезков OM_1, OM_2 и OM_3, отсекаемых плоскостью π на осях Ox, Oy и Oz, соответственно.

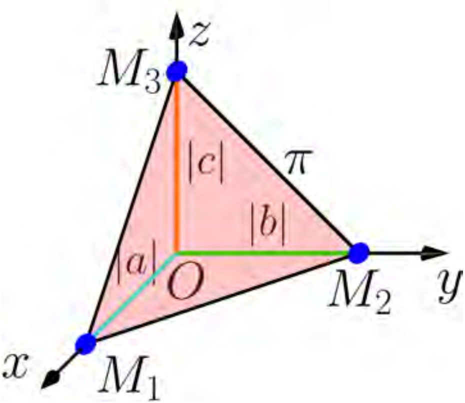
Уравнение плоскости в отрезках



$OM_1 = |a|$
$OM_2 = |b|$

длинам отрезков OM_1, OM_2 и OM_3, отсекаемых плоскостью π на осях Ox, Oy и Oz, соответственно.

Уравнение плоскости в отрезках

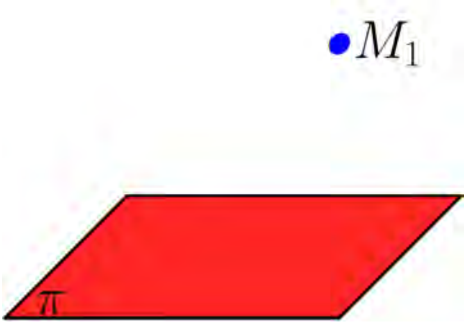


$$OM_1 = |a|$$
$$OM_2 = |b|$$
$$OM_3 = |c|$$

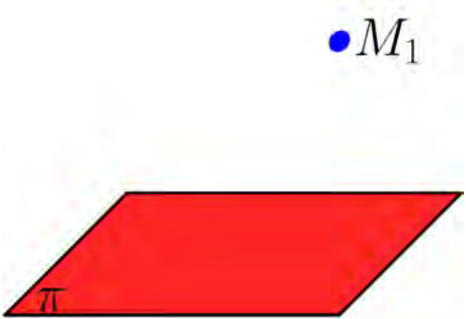
длинам отрезков OM_1, OM_2 и OM_3, отсекаемых плоскостью π на осях Ox, Oy и Oz, соответственно.

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки до плоскости



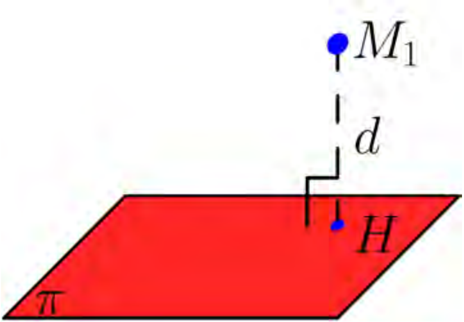
Расстояние от точки до плоскости



Пусть плоскость π задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Расстояние от точки до плоскости

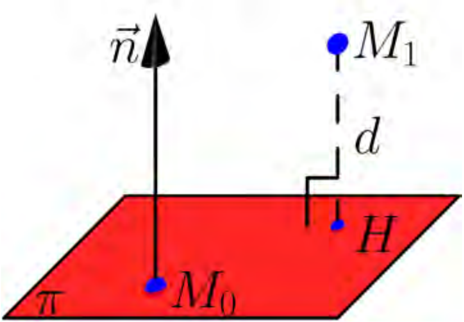


Пусть плоскость π задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

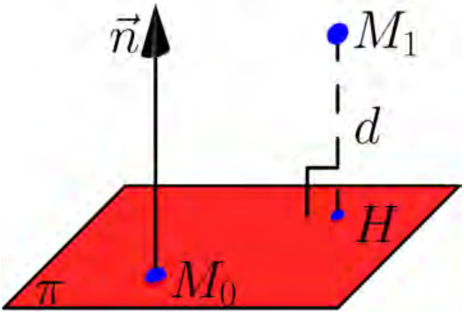
и нам необходимо вычислить расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до этой плоскости.

Расстояние от точки до плоскости



Поместим начало нормального вектора плоскости $\vec{n} = (A, B, C)$ в произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой же плоскости.

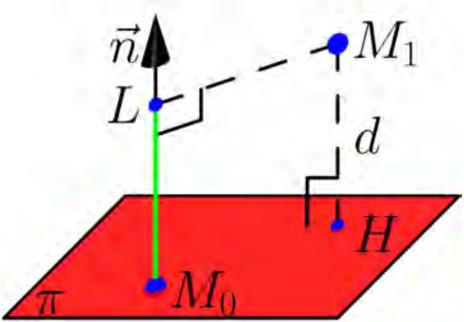
Расстояние от точки до плоскости



Тогда расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π есть

$$d = M_1H$$

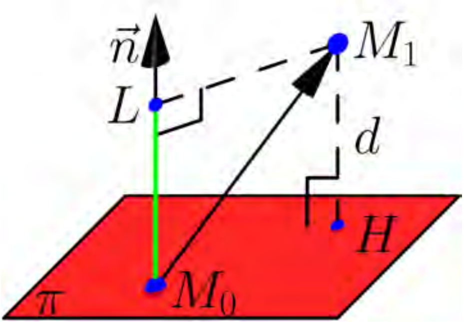
Расстояние от точки до плоскости



Тогда расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π есть

$$d = M_1H = M_0L$$

Расстояние от точки до плоскости



Тогда расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π есть

$$d = M_1H = M_0L = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}\right|.$$

Расстояние от точки до плоскости

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M_1}\right|$$

Расстояние от точки до плоскости

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M_1}| = |\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1}| / |\vec{n}|$$

Расстояние от точки до плоскости

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}| = |\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}|/|\vec{n}| =$$

$$= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Расстояние от точки до плоскости

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}| = |\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}|/|\vec{n}| =$$

$$= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Расстояние от точки до плоскости

Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости π, то

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Расстояние от точки до плоскости

Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости π, то

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

или

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D.$$

Расстояние от точки до плоскости

Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости π, то

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

или

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D.$$

Следовательно,

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Взаимное расположение двух плоскостей

Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть две плоскости π_1 и π_2 заданы своими общими уравнениями:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогда

Тогда

а) если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

Тогда

а) если

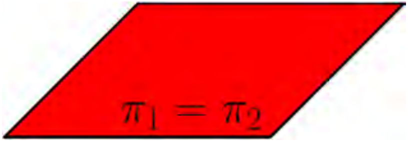
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

то плоскости совпадают;

Взаимное расположение двух плоскостей

Тогда

а) если
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$
то плоскости совпадают;



Тогда

б) если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$

Тогда

б) если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$

то плоскости параллельны;

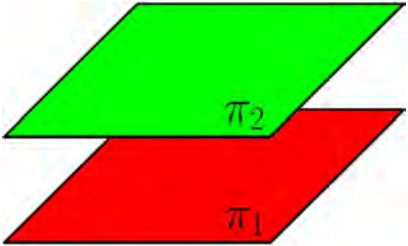
Взаимное расположение двух плоскостей

Тогда

б) если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$

то плоскости параллельны;



Тогда

в) если

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2},$$

Взаимное расположение двух плоскостей

Тогда

в) если

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2},$$

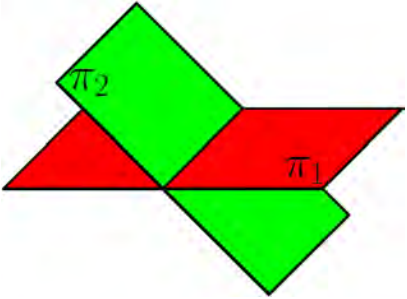
то плоскости пересекаются.

Тогда

в) если

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2},$$

то плоскости пересекаются.



Определение

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется величина наименьшего из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть угол между плоскостями π_1 и π_2 равен φ,

Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть угол между плоскостями π_1 и π_2 равен φ, а угол между нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ этих же плоскостей есть α.

Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть угол между плоскостями π_1 и π_2 равен φ, а угол между нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ этих же плоскостей есть α.
Тогда
$$\varphi = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \leq 90^\circ \\ 180^\circ - \alpha, \text{ если } \alpha > 90^\circ. \end{cases}$$

Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть угол между плоскостями π_1 и π_2 равен φ, а угол между нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ этих же плоскостей есть α.

Тогда

$$\varphi = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \leq 90^\circ \\ 180^\circ - \alpha, \text{ если } \alpha > 90^\circ. \end{cases}$$

Поэтому

$$\cos\varphi = \left|\cos\alpha\right|$$

Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть угол между плоскостями π_1 и π_2 равен φ, а угол между нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ этих же плоскостей есть α.

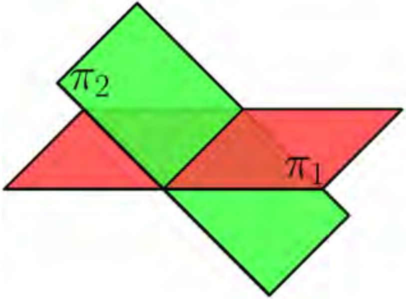
Тогда

$$\varphi = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \le 90^\circ \\ 180^\circ - \alpha, \text{ если } \alpha > 90^\circ. \end{cases}$$

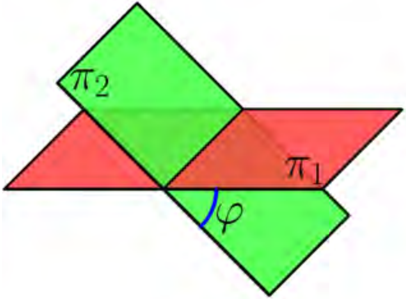
Поэтому

$$\cos\varphi = |\cos\alpha| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

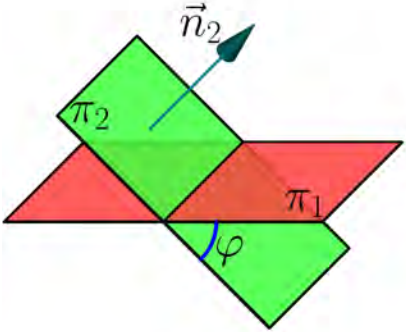
Взаимное расположение двух плоскостей



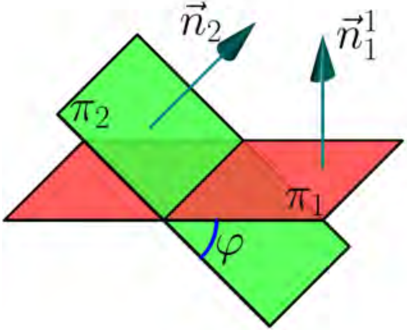
Взаимное расположение двух плоскостей



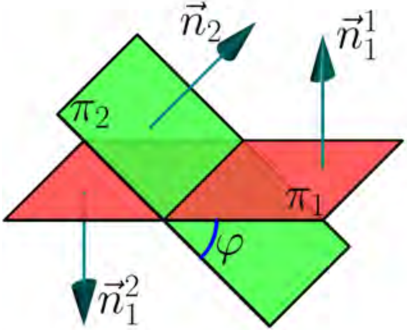
Взаимное расположение двух плоскостей



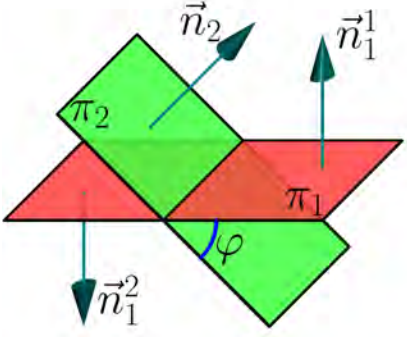
Взаимное расположение двух плоскостей



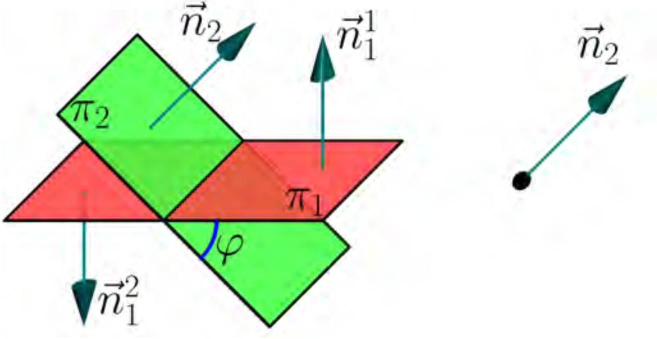
Взаимное расположение двух плоскостей



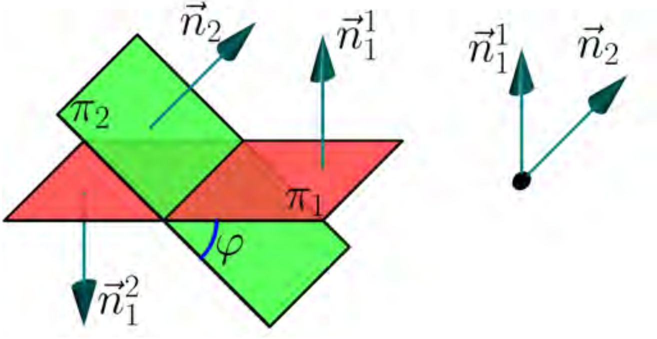
Взаимное расположение двух плоскостей



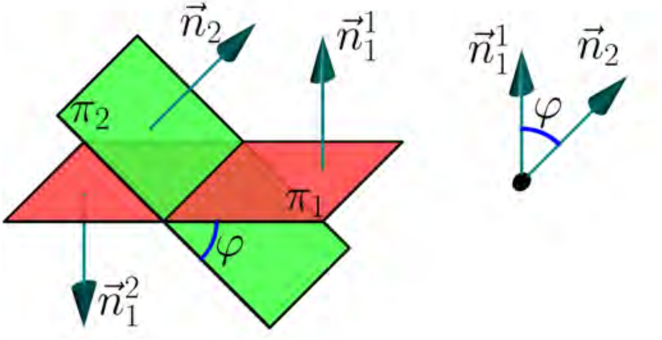
Взаимное расположение двух плоскостей



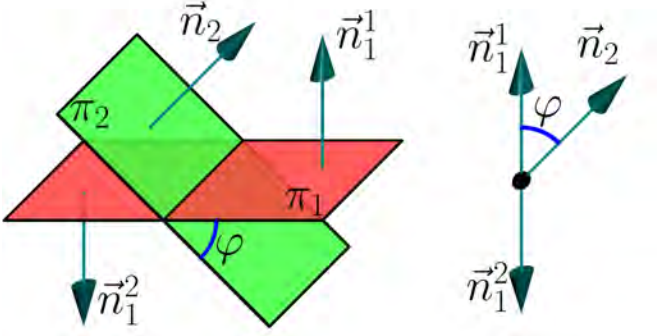
Взаимное расположение двух плоскостей



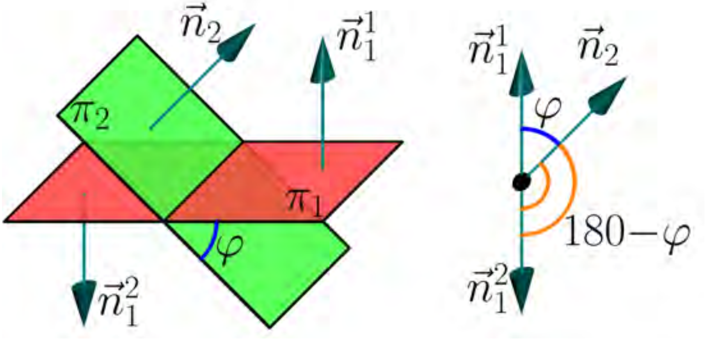
Взаимное расположение двух плоскостей



Взаимное расположение двух плоскостей



Взаимное расположение двух плоскостей



Взаимное расположение двух плоскостей

Условие параллельности плоскостей:

$$\pi_1 || \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2.$$

Взаимное расположение двух плоскостей

Условие параллельности плоскостей:

$$\pi_1 || \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$