Аналитическая геометрия
Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Комплексные числа и многочлены
Лекция 2.3

Аннотация

Понятие комплексного числа. Геометрическое изображение комплексных чисел. Формы записи комплексных чисел: алгебраическая, тригонометрическая, показательная. Действия над комплексными числами: сложение, вычитание, деление, возведение в степень, извлечение корня.

1 Комплексные числа

Рассмотрим квадратное уравнение

$$z^2 + pz + q = 0$$

с отрицательным дискриминантом

$$D = p^2 - 4q < 0.$$

Перепишем его в виде $D = -|D|$ и формально воспользуемся стандартной формулой для корней квадратного уравнения:

$$z_{1,2} = (-p \pm \sqrt{D})/2 = (-p \pm \sqrt{-|D|})/2 = (-p \pm \sqrt{-1}\sqrt{|D|})/2.$$

В данной формуле проблема состоит в $\sqrt{-1}$. Такого числа в множестве действительных чисел нет. Введем обозначение

$$i = \sqrt{-1}.$$

Величину i назовем **мнимой единицей** и определим как некий математический объект, удовлетворяющий условию

$$i^2 = -1.$$

Тогда

$$z_{1,2} = (-p \pm i\sqrt{|D|})/2 = -p/2 \pm i\sqrt{|D|}/2 = x \pm iy.$$

Определение

Комплексным числом z называется выражение вида $x+iy$, где x и y – действительные числа, а i – мнимая единица. При этом число x называется **действительной частью** числа z и обозначается $\mathrm{Re}z$, а число y – **мнимой частью** и обозначается $\mathrm{Im}z$.

Если $x = 0$, то комплексное число $z = iy$ называют **чисто мнимым**.

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой C.

Определение

Числа $z = x+iy$ и $\bar{z} = x-iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **комплексно сопряженными.**

Определение

Запись комплексного числа в виде $z = x + iy$ называется **алгебраической формой записи** комплексного числа.

Определение

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются **равными**, если равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Определение

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

а **разностью** – комплексное число

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Определение

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Данная формула получается путем обычного арифметического перемножения двух двучленов:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$
$$= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Определение

Частным от деления двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Данная формула получается путем умножения числителя и знаменателя дроби z_1/z_2 на число, сопряженное знаменятелю, $\bar{z}_2$.

Пример: Выполним арифметические действия над комплексными числами $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 2i$:

а) $z_1 + z_2 = (1 - i) + (3 + 2i) = (1 + 3) + i(-1 + 2) = 4 + i$;

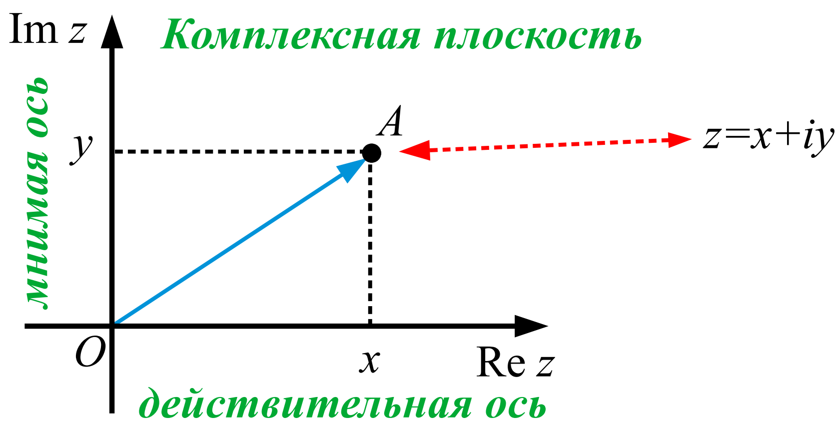
б) $z_1 - z_2 = (1 - i) - (3 + 2i) = (1 - 3) + i(-1 - 2) = -2 - 3i$;

в) $z_1 \cdot z_2 = (1 - i) \cdot (3 + 2i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2i - i \cdot 3 - i \cdot 2i = 5 - i$;

г) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1 - i}{3 + 2i} = \dfrac{(1 - i) \cdot (3 - 2i)}{(3 + 2i) \cdot (3 - 2i)} = \dfrac{3 - 2i - 3i - 2}{9 - 6i + 6i + 4} = \dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}i.$

2 Геометрическое изображение комплексных чисел

Любому комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие на плоскости Oxy точку $A(x, y)$ или ее радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$. В этом случае плоскость Oxy называется **комплексной плоскостью**, ось Ox – **действительной осью**, т.к. на ней лежат действительные числа $z = x + i0 = x$, ось Oy – **мнимой осью**, т.к на ней лежат чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$.



Определение

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется модуль радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$, соответствующего этому числу.

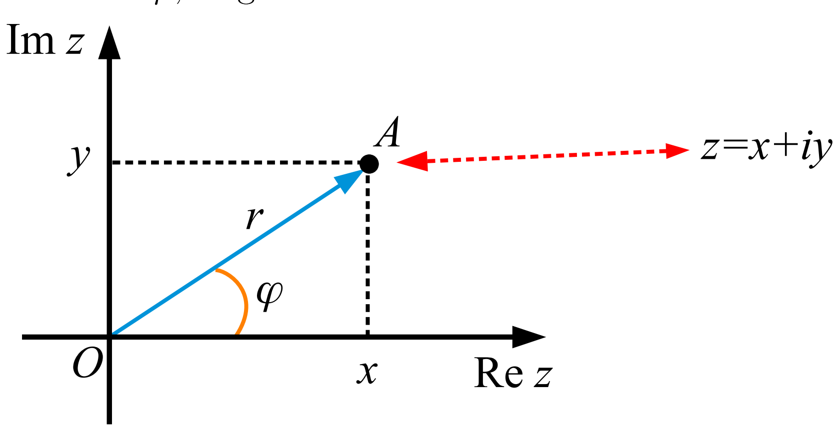
Обозначение: r, ρ, $|z|$.

Расчетная формула: $r = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Определение

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором, соответствующим этому числу.

Обозначение: φ, $\mathrm{Arg} z$.



Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ является многозначной величиной:

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2\pi n \ (n \in Z),$$

где $\arg z$ – **главное значение аргумента**, $-\pi < \arg z \leq \pi$. Для практических расчетов из множества значений аргумента $\mathrm{Arg}z$ в основном выбирают его главное значение $\arg z$, которое определяется по формуле:

$$\arg z = \mathrm{arctg}(y/x) + \pi k,$$

где k выбирается по правилу:
если z находится в 1-ой или 4-ой четвертях комплексной плоскости, то $k = 0$;
если z находится во 2-ой четверти комплексной плоскости, то $k = 1$;
если z находится в 3-ей четверти комплексной плоскости, то $k = -1$.

3 Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Из последнего рисунка видно, что

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Тогда комплексное число z можно записать в виде:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r - модуль комплексного числа z, φ - один из его аргументов.

Определение

Запись в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа.

Пример: Записать комплексное число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме.

Для числа z имеем $x = 1$, $y = -1$. Тогда

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,
$\varphi = \arg z = \mathrm{arctg}(y/x) + \pi k = \mathrm{arctg}((-1)/1) + \pi \cdot 0 = -\pi/4$.
Отсюда $z = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4))$.

Арифметические действия над комплексными числами в тригонометрической форме:
Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тогда
1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$,
2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где n - целое положительное число. Это выражение называется **формулой Муавра**.

4 Показательная форма записи комплексного числа

Используя **формулу Эйлера**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

каждое комплексное число можно записать в форме

$$z = re^{i\varphi},$$

которая называется **показательной формой записи** комплексного числа.

Арифметические действия над комплексными числами в показательной форме:
Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда
1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, 2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

5 Корень n-ой степени

Определение

Комплексное число w называется **значением корня n-ой степени** из комплексного числа z, если

$$w^n = z.$$

Любое ненулевое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ обладает n различными значениями корня n-ой степени w_0, w_1, ..., w_{n-1}, каждое из которых вычисляется по формуле:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right).$$

Определение

Множество всех значений корня n-ой степени из комплексного числа z называется **корнем n-ой степени** из z и обозначается $\sqrt[n]{z}$.

Таким образом, $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, ..., w_{n-1}\}$. Для удобства практических расчетов данное выражение можно переписать в виде одной общей формулы, содержащей в себе все значения корня:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, ..., n-1.$$

Пример: Найти все значения $\sqrt[3]{-1}$.

Запишем число $z = -1 = -1 + i0$ в тригонометрической форме. Поскольку $x = -1$, $y = 0$, то $r = 1$, $\varphi = \pi$ и $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$. Тогда

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Используя данную формулу, вычислим все значения нашего корня. Получаем

$k = 0$: $(\sqrt[3]{-1})_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

$k=1$: $(\sqrt[3]{-1})_1 = \cos\dfrac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi+2\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$

$k=2$: $(\sqrt[3]{-1})_2 = \cos\dfrac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi+4\pi}{3} = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3} =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{-1} = \left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i; -1; \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$