Аналитическая геометрия
Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Комплексные числа и многочлены
Лекция 2.2

Аннотация

Линии второго порядка на плоскости: эллипс, гипербола, парабола. Определение, общие характеристики. Каноническое уравнение, исследование формы. Эксцентриситет, директрисы. Общее уравнение кривой.

1 Линии второго порядка

Определение

Алгебраической линией (кривой) второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в декартовой системе координат Oxy задается уравнением второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

По крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля.

Это уравнение определяет на плоскости эллипс, гиперболу или параболу. В некоторых частных случаях это уравнение может определять также две прямые, точку или мнимое геометрическое место точек.

Если кривая имеет специфическое расположение относительно системы координат (например, симметрична относительно некоторых координатных осей или имеет вершину в начале координат и пр.), то ее уравнение имеет достаточно простой вид, который называется **каноническим**.

2 Эллипс

Определение

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, причем эта величина больше, чем расстояние между фокусами.

Пусть фокусы эллипса F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O, и пусть расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка эллипса, $MF_1 + MF_2 = 2a$ и по определению эллипса $2a > 2c$.

По формуле расстояния между двумя точками

$$MF_1 = |\overrightarrow{MF_1}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$MF_2 = |\overrightarrow{MF_2}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Тогда из равенства $MF_1 + MF_2 = 2a$ получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Перенеся второе слагаемое в левой части последнего равенства в правую часть и возведя обе части в квадрат, получим

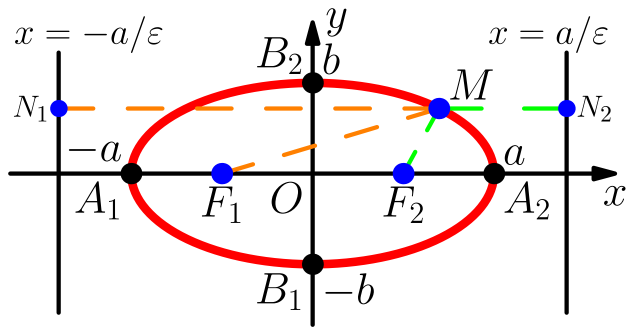
$$a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Еще раз возведем обе части получившегося равенства в квадрат и разделим на $a^2(a^2 - c^2)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Полагая $a^2 - c^2 = b^2$, придем к **каноническому уравнению эллипса**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



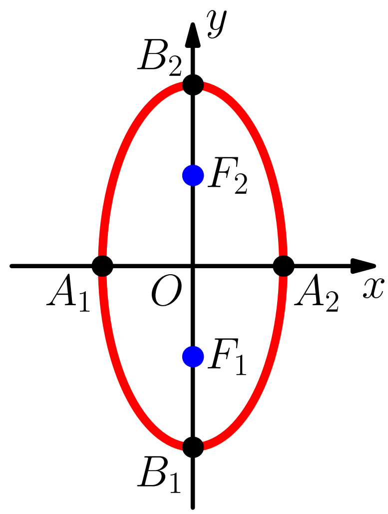
Точка O называется **центром эллипса**, а точки A_1, A_2 и B_1, B_2 – **вершинами эллипса**. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 называются **большой и малой осями эллипса**, их длины равны $2a$ и $2b$, соответственно. Отрезки OA_2 и OB_2 называются **большой и малой полуосями эллипса**, причем их длины a и b также часто называют **большой и малой полуосями**. Расстояние между фокусами F_1 и F_2, равное $2c$, называется **фокальным (фокусным) расстоянием эллипса**, а число c – **полуфокусным расстоянием**. Ось, на которой лежат фокусы, есть **фокальная ось эллипса**. Рассмотренные здесь точки имеют следующие координаты:

$$A_1(-a, 0),\ A_2(a, 0),\ B_1(0, -b),\ B_2(0, b),\ F_1(-c, 0),\ F_2(c, 0).$$

Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом эллипса**, его возможные значения: $0 \leq \varepsilon < 1$. Когда $\varepsilon = 0$ ($b = a$), эллипс становится окружностью. Чем больше ε, тем более сплющенным будет эллипс.

Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются **директрисами эллипса**. Их свойство – отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к аналогичному расстоянию до директрисы, лежащей по ту же сторону от центра O, что и фокус, есть величина постоянная, равная эксцентриситету, т.е. $MF_1/MN_1 = \varepsilon$, $MF_2/MN_2 = \varepsilon$.

Если фокусы эллипса $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy, то большая ось эллипса длиной $2b$ лежит на оси Oy, малая ось длиной $2a$ – на оси Ox, $a < b$, $b^2 - c^2 = a^2$ и $\varepsilon = c/b$. Уравнение эллипса не меняется.



$A_1(-a, 0)$
$A_2(a, 0)$
$B_1(0, -b)$
$B_2(0, b)$
$F_1(0, -c)$
$F_2(0, c)$

К кривым второго порядка эллиптического типа относятся также **мнимый эллипс**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

и **точка**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

3 Гипербола

Определение

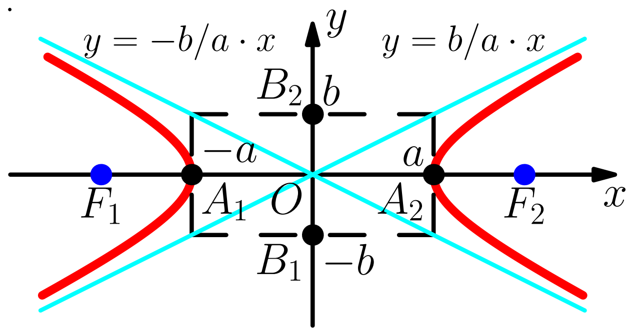
Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, причем эта величина меньше, чем расстояние между фокусами.

Пусть фокусы гиперболы F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O, и пусть расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка гиперболы, $|MF_1 - MF_2| = 2a$ и по определению гиперболы $2a < 2c$.

Используя формулу расстояния между двумя точками и раскрывая знак модуля, из равенства $|MF_1 - MF_2| = 2a$ получаем
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

После преобразований, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим **каноническое уравнение гиперболы**
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
где $a^2 + b^2 = c^2$.



Точка O называется **центром гиперболы**, а точки A_1 и A_2 – **вершинами гиперболы**. Гипербола не пересекает ось Oy. Поэтому отрезок A_1A_2 называют **действительной осью гиперболы**, отрезок B_1B_2 -**мнимой осью гиперболы**, причем их длины равны $2a$ и $2b$, соответственно. Отрезки OA_2 и OB_2 называются **действительной и мнимой полуосями**, их длины a и b также часто называют **действительной и мнимой полуосями гиперболы**. Расстояние между фокусами F_1 и F_2, равное $2c$, называется **фокусным (фокальным) расстоянием гиперболы**, а число c – **полуфокусным расстоянием**. Ось, на которой лежат фокусы, есть **фокальная ось гиперболы**, причем фокусы всегда лежат на действительной оси. Рассмотренные здесь точки имеют следующие координаты:
$$A_1(-a,0),\ A_2(a,0),\ B_1(0,-b),\ B_2(0,b),\ F_1(-c,0),\ F_2(c,0).$$

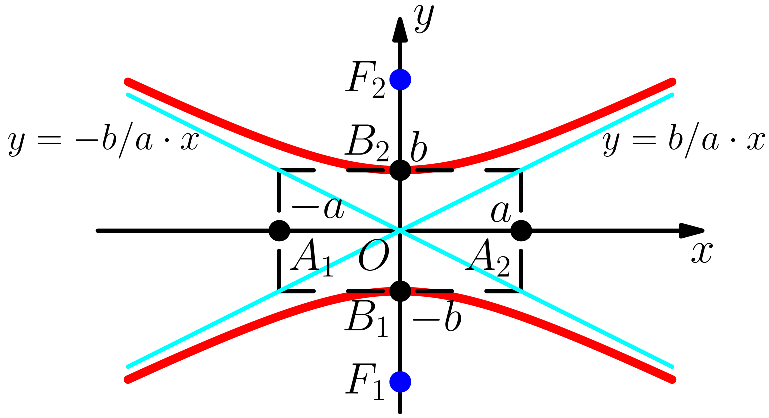
При неограниченном удалении точек гиперболы от начала координат они неограниченно приближаются к прямым, проходящим через диагонали прямоугольника со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$, т.е. к прямым $y = \pm b/a \cdot x$, которые являются **асимптотами гиперболы**.

Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом гиперболы**, его возможные значения: $1 < \varepsilon < +\infty$. Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются **директрисами гиперболы** и обладают тем же свойством, что и у эллипса: отношение расстояния от любой точки гиперболы до фокуса к аналогичному расстоянию до директрисы, лежащей по ту же сторону от центра O, что и фокус, есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

описывает **сопряженную гиперболу**.



Действительная и мнимая оси обычной гиперболы являются, соответственно, мнимой и действительной осями сопряженной гиперболы, а асимптоты у них общие. Фокусы сопряженной гиперболы $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy, эксцентриситет – $\varepsilon = c/b$, уравнения директрис – $y = \pm b/\varepsilon$.

Если полуоси гиперболы равны ($a = b$), то гипербола называется **равносторонней**. Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

К кривым второго порядка гиперболического типа относится также **пара пересекающихся прямых**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

4 Парабола

Определение

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**. Расстояние от фокуса до директрисы называется **параметром параболы** и обозначается p ($p > 0$).

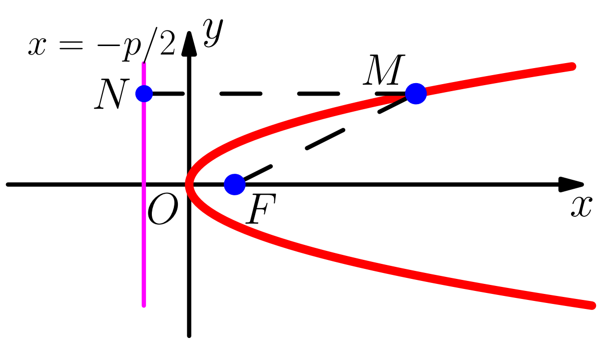
Расположим фокус параболы F на оси Ox, которая проходит перпендикулярно директрисе, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой. Тогда имеем фокус $F(p/2, 0)$ и **уравнение директрисы** $x = -p/2$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Тогда по определению $MF = MN$. Откуда получаем

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

После возведения обеих частей в квадрат получим **каноническое уравнение параболы**

$$y^2 = 2px.$$



Полагают, что **эксцентриситет параболы** $\varepsilon = 1$. Точку O называют **вершиной параболы**, а величину FM – **фокальным радиусом точки** M.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ ($p > 0$) также определяют параболы.

К кривым второго порядка параболического типа относятся также $(y-c)^2 = 0$ - **пара совпадающих прямых**, $y^2 = c^2$ - **пара параллельных прямых**, $y^2 = -c^2$ - **пара мнимых параллельных прямых.**