Аналитическая геометрия
Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Комплексные числа и многочлены
Лекция 2.1

Аннотация

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Уравнение плоскости в отрезках. Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между двумя плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.

1 Плоскость в пространстве

1.1 Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором

Пусть в пространстве заданы декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ и произвольная плоскость π. Известны лежащая в данной плоскости точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярный данной плоскости.

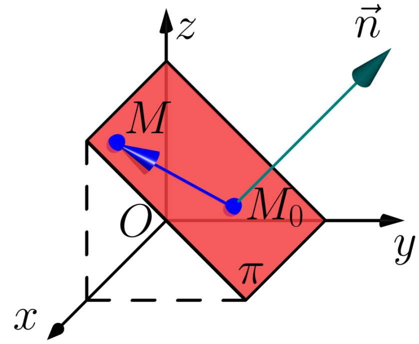
Выберем на плоскости π произвольную точку $M(x, y, z)$ и проведем вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, целиком лежащий в этой плоскости. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т.е. их скалярное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0.$$

Отсюда получаем **уравнение плоскости с заданным нормальным вектором**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называют **нормальным вектором плоскости**.



1.2 Общее уравнение плоскости

Если в уравнении плоскости с заданным нормальным вектором раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то можно получить **общее уравнение плоскости**

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C - координаты нормального вектора плоскости.

Рассмотрим *частные случаи* общего уравнения плоскости:

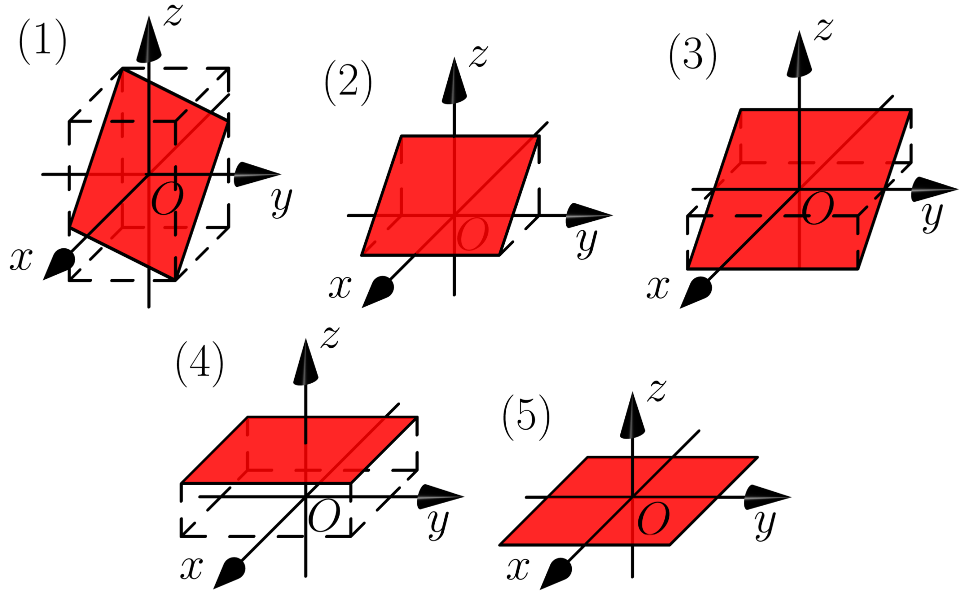
(1) Если $D = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат.

(2) Если $B = 0$, то плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy.

(3) Если $B = D = 0$, то плоскость $Ax + Cz = 0$ проходит через ось Oy.

(4) Если $A = B = 0$, то плоскость $Cz + D = 0$ параллельна плоскости Oxy.

(5) Если $A = B = D = 0$, то получаем уравнение $z = 0$ плоскости Oxy.



1.3 Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть в пространстве заданы декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ и произвольная плоскость π. Известны лежащие в данной плоскости точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

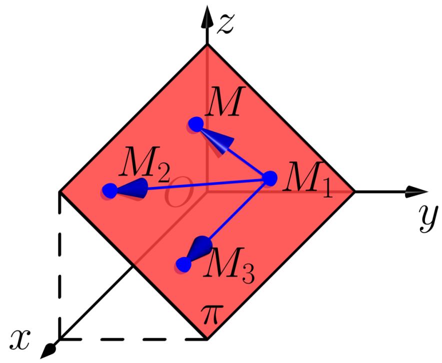
Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение этой плоскости.

Пусть произвольная точка $M(x, y, z)$ лежит в плоскости π. Составим векторы:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Эти векторы лежат на плоскости π тогда и только тогда, когда они компланарны, т.е. их смешанное произведение равно нулю:

$$(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0.$$



Записав это условие в координатной форме, получим **уравнение плоскости, проходящей через три точки**:

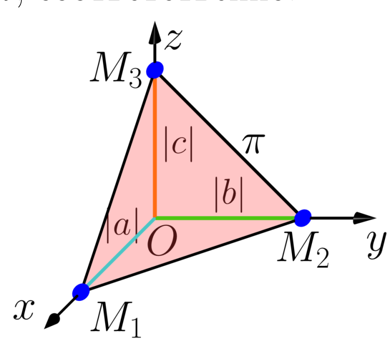
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.4 Уравнение плоскости в отрезках

Рассмотрим плоскость π, проходящую через точки $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$ и $M_3(0,0,c)$. Подставим координаты этих точек в уравнение плоскости, проходящей через три точки, и вычислим входящий в него определитель. Получим **уравнение плоскости в отрезках**

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где a, b и c – действительные числа, абсолютные значения которых равны длинам отрезков OM_1, OM_2 и OM_3, отсекаемых плоскостью π на осях Ox, Oy и Oz, соответственно.



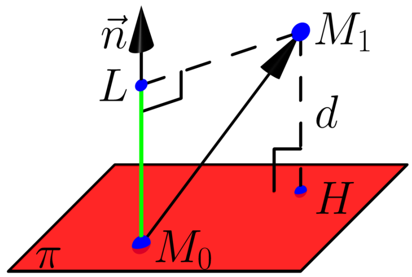
2 Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость π задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и нам необходимо вычислить расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до этой плоскости.

Поместим начало нормального вектора плоскости $\vec{n} = (A, B, C)$ в произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой же плоскости.



Тогда расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π есть

$$d = M_1H = M_0L = |\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}| = |\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}|/|\vec{n}| =$$

$$= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости π, то

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

или

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D.$$

Следовательно,

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

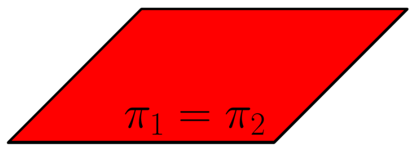
3 Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть две плоскости π_1 и π_2 заданы своими общими уравнениями:

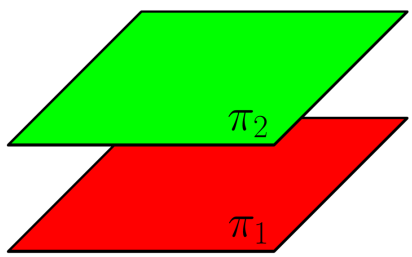
$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогда

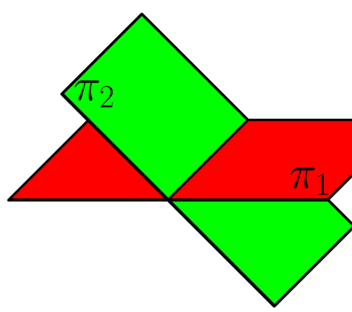
а) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают;



б) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости параллельны;



в) если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ или $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то плоскости пересекаются.



Определение

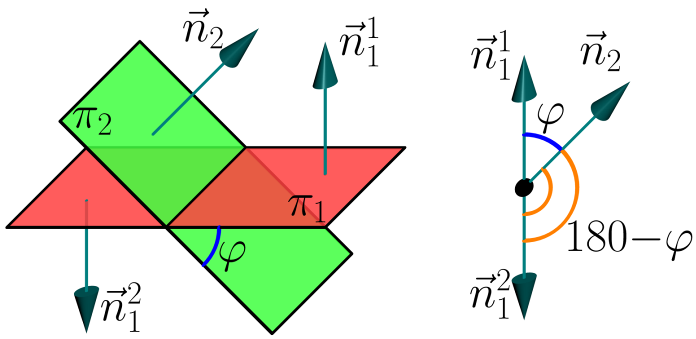
Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется величина наименьшего из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Пусть угол между плоскостями π_1 и π_2 равен φ, а угол между нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ этих же плоскостей есть α. Тогда

$$\varphi = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \le 90^\circ \\ 180^\circ - \alpha, \text{ если } \alpha > 90^\circ. \end{cases}$$

Поэтому

$$\cos\varphi = |\cos\alpha| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$



Условие параллельности плоскостей:

$$\pi_1 || \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$