Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

Лекция 2.5

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Свойства функций, непрерывных в точке

*Теорема (локальная ограниченность непрерывной функции)**

*Теорема (локальная ограниченность непрерывной функции)**

Если $f(x) \in C(a)$, то существует такая окрестность точки a, в которой функция $f(x)$ ограничена.

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$.

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(1)$,

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(1)$, такое что

$$\forall x \in R, |x - a| < \delta_1: |f(x) - f(a)| < 1$$

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(1)$, такое что

$$\forall x \in R, |x - a| < \delta_1: |f(x) - f(a)| < 1$$

или

$$\forall x \in U(a, \delta_1): |f(x) - f(a)| < 1.$$

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1)\colon f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1.$$

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1)\colon f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1.$$

Это означает, что существует окрестность точки a, в которой функция $f(x)$ ограничена.

$\blacksquare$

*Теорема (локальное знакопостоянство непрерывной функции)**

Свойства функций, непрерывных в точке

*Теорема (локальное знакопостоянство непрерывной функции)**

Если $f(x) \in C(a)$ и $f(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки a функция $f(x)$ сохраняет свой знак.

Доказательство

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = f(a)$.

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = f(a)$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(f(a))$,

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = f(a)$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(f(a))$, такое что
$$\forall x \in R, |x - a| < \delta_1: |f(x) - f(a)| < f(a)$$

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = f(a)$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(f(a))$, такое что

$$\forall x \in R, |x - a| < \delta_1: |f(x) - f(a)| < f(a)$$

или

$$\forall x \in U(a, \delta_1): |f(x) - f(a)| < f(a).$$

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1)\colon 0 < f(x) < 2f(a).$$

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1)\colon 0 < f(x) < 2f(a).$$

Это означает, что существует окрестность точки a, в которой $f(x) > 0$,

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1)\colon 0 < f(x) < 2f(a).$$

Это означает, что существует окрестность точки a, в которой $f(x) > 0$, т.е. функция $f(x)$ сохраняет свой знак.

Свойства функций, непрерывных в точке

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1)\colon 0 < f(x) < 2f(a).$$

Это означает, что существует окрестность точки a, в которой $f(x) > 0$, т.е. функция $f(x)$ сохраняет свой знак.

Аналогично доказывается для $f(a) < 0$. ∎

Непрерывность функции на промежутке

Определение

Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется **непрерывной на этом отрезке**.

Непрерывность функции на промежутке

Определение

Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется **непрерывной на этом отрезке**.

Обозначение: $f(x) \in C[a, b]$

Теорема (теорема Вейерштрасса)

Непрерывность функции на промежутке

Теорема (теорема Вейерштрасса)

Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена на этом отрезке и достигает на нем своих точной верхней и точной нижней граней.

Математическая формулировка теоремы:

Математическая формулировка теоремы:
$f(x) \in C[a, b]$

Математическая формулировка теоремы:
$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow$

Математическая формулировка теоремы:
$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists x', x'' \in [a, b]$:

Непрерывность функции на промежутке

Математическая формулировка теоремы:
$f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists x', x'' \in [a,b]$:

$$\sup_{[a,b]} f(x) = f(x'),$$

Математическая формулировка теоремы:
$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists x', x'' \in [a, b]$:

$$\sup_{[a,b]} f(x) = f(x'),$$

$$\inf_{[a,b]} f(x) = f(x''),$$

Непрерывность функции на промежутке

Математическая формулировка теоремы:
$f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists x', x'' \in [a,b]$:

$$\sup_{[a,b]} f(x) = f(x'),$$

$$\inf_{[a,b]} f(x) = f(x''),$$

$$\forall x \in [a,b] : f(x'') \leq f(x) \leq f(x').$$

Теорема (теорема Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции)

Непрерывность функции на промежутке

Теорема (теорема Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции)
Если $f(x) \in C[a, b]$, то для любого числа C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.

Теорема (о непрерывности обратной функции)

Теорема (о непрерывности обратной функции)
Пусть функция $f(x)$ определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда обратная функция f^{-1} определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.

Асимптоты графика функции

Асимптоты графика функции

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x > a$ (или $x < a$).

Асимптоты графика функции

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x > a$ (или $x < a$). Если существуют такие числа k и b, что функция $f(x) - (kx + b)$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$),

Асимптоты графика функции

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x > a$ (или $x < a$). Если существуют такие числа k и b, что функция $f(x) - (kx + b)$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), то прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$).

Асимптоты графика функции

Графически асимптота является прямой, расстояние до которой от графика функции стремится к нулю.

Асимптоты графика функции

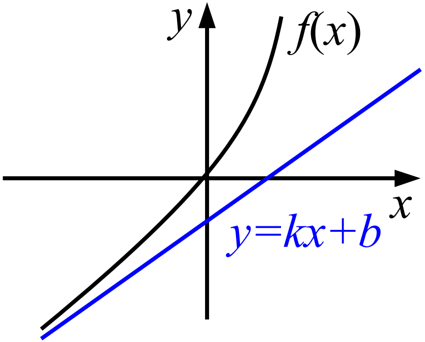

Рис.: Левая наклонная асимптота

Асимптоты графика функции

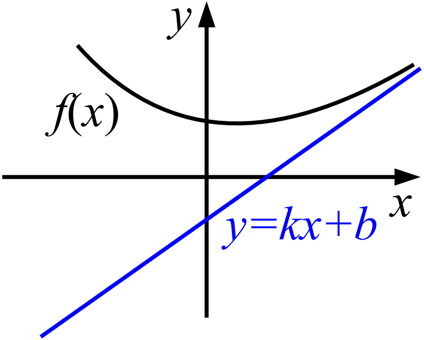

Рис.: Правая наклонная асимптота

Коэффициенты наклонных асимптот находят по формулам:

Асимптоты графика функции

Коэффициенты наклонных асимптот находят по формулам:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

Асимптоты графика функции

Коэффициенты наклонных асимптот находят по формулам:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Асимптоты графика функции

Коэффициенты наклонных асимптот находят по формулам:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx).$$

Если хотя бы один из коэффициентов k и b равен бесконечности или не существует, то функция не имеет соответствующей наклонной асимптоты.

Асимптоты графика функции

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a, и пусть выполняется хотя бы одно из условий

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty.$$

Асимптоты графика функции

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a, и пусть выполняется хотя бы одно из условий

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty.$$

Тогда прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$.

Асимптоты графика функции

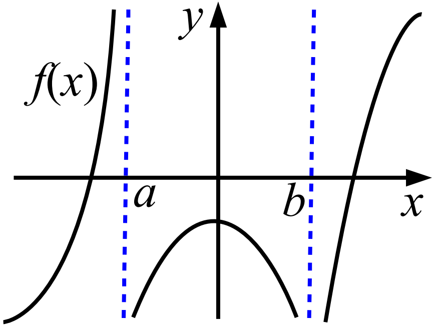

Рис.: Вертикальные асимптоты $x = a$ и $x = b$