Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

Лекция 2.4

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Непрерывность функции

Непрерывность функции

Определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности конечной точки a, называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Эквивалентное определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности конечной точки a, называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Обозначение: $f(x) \in C(a)$

Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Замечание

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Замечание

Непрерывность функции предполагает, что эта функция определена в некоторой окрестности точки a, включая саму точку a.

Геометрическая интерпретация

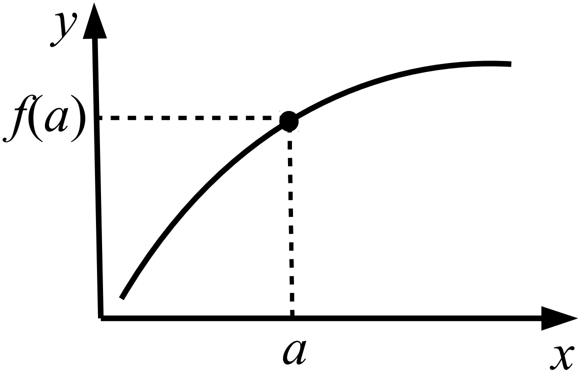
Непрерывность функции

Геометрическая интерпретация

Графически непрерывность функции в точке a означает, что ее график в окрестности точки a представляет собой сплошную линию, которая не претерпевает каких-либо разрывов при переходе через саму точку a

Непрерывность функции

Геометрическая интерпретация



Непрерывность функции

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности.

Непрерывность функции

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности. Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности. Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

1) необходимо и достаточно,

Непрерывность функции

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности. Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

1) необходимо и достаточно,
2) тогда и только тогда, когда.

Например,

Непрерывность функции

Например, выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как

Например, выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как
1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B.

Непрерывность функции

Например, выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как
1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B.
2. Для справедливости утверждения A необходима и достаточна справедливость утверждения B.

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:

Непрерывность функции

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:

1) $A \Rightarrow B$ – если справедливо A, то справедливо B

Непрерывность функции

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:
1) $A \Rightarrow B$ – если справедливо A, то справедливо B (прямая теорема, необходимое условие),

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:

1) $A \Rightarrow B$ – если справедливо A, то справедливо B (прямая теорема, необходимое условие),

2) $A \Leftarrow B$ – если справедливо B, то справедливо A

Непрерывность функции

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:

1) $A \Rightarrow B$ – если справедливо A, то справедливо B (прямая теорема, необходимое условие),

2) $A \Leftarrow B$ – если справедливо B, то справедливо A (обратная теорема, достаточное условие).

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:
1) $A \Rightarrow B$ – если справедливо A, то справедливо B (прямая теорема, необходимое условие),
2) $A \Leftarrow B$ – если справедливо B, то справедливо A (обратная теорема, достаточное условие).
Другими словами, утверждения A и B справедливы или нет одновременно.

Введем обозначения:

Непрерывность функции

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ - приращение аргумента в точке a,

Непрерывность функции

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ - приращение аргумента в точке a,

$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ - приращение функции в точке a.

*Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке)**

*Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке)**

$$f(x) \in C(a) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Расшифровка математической записи:

Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:
$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

$\Leftrightarrow$ - необходимо и достаточно, чтобы

Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

$\Leftrightarrow$ - необходимо и достаточно, чтобы

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ - предел приращения функции равнялся нулю при стремлении к нулю приращения аргумента

Доказательство

Доказательство

1. Необходимость.

Доказательство

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \in C(a)$

Доказательство

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \in C(a)$

Доказать: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$

$$\Downarrow$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$

$$\Downarrow$$

$$x = a + \Delta x$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$

$$\Downarrow$$

$$x = a + \Delta x$$

$$\Downarrow$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$

$$\Downarrow$$

$$x = a + \Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) - f(a)$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$

$$\Downarrow$$

$$x = a + \Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$

$$\Downarrow$$

$$x = a + \Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta f.$$

Непрерывность функции

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

Непрерывность функции

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \quad |\Delta f| < \varepsilon.$$

Непрерывность функции

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \quad |\Delta f| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

2. Достаточность.

2. Достаточность.

Дано: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

Непрерывность функции

2. Достаточность.

Дано: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

Доказать: $f(x) \in C(a)$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\Downarrow$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \quad |\Delta f| < \varepsilon.$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$
$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

$\Delta x = x - a,$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \quad |\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \quad |\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \quad |\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$

$$\Downarrow$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \quad |\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta :$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta :$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow f(x) \in C(a). \ \blacksquare$$

Односторонняя непрерывность

Односторонняя непрерывность

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, c]$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева** в точке c, если

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c).$$

Односторонняя непрерывность

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[c, b)$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа** в точке c, если

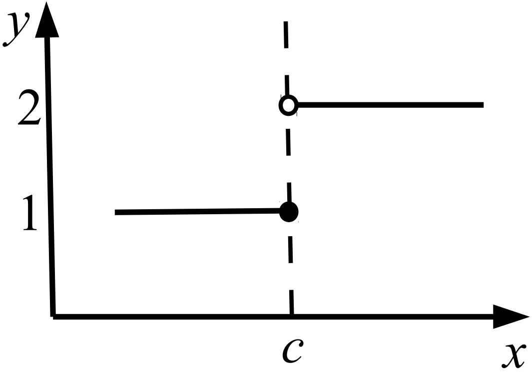
$$\lim_{x \to c+0} f(x) = f(c).$$

Односторонняя непрерывность

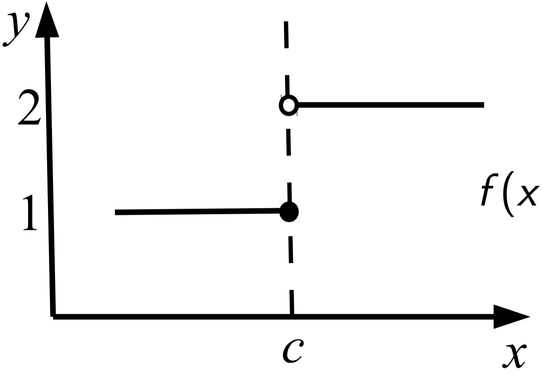
Пример функции, непрерывной слева:

Односторонняя непрерывность

Пример функции, непрерывной слева:



Пример функции, непрерывной слева:



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq c \\ 2, & x > c \end{cases}$$

Точки разрыва

Точки разрыва

Определение

Точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке a или определена, но не является в ней непрерывной.

Классификация точек разрыва

Точки разрыва

Классификация точек разрыва

1. Если a - точка разрыва функции $f(x)$ и в этой точке существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \text{ и } \lim_{x \to a+0} f(x),$$

то точка a называется **точкой разрыва первого рода**.

Точки разрыва

Классификация точек разрыва

1.1. Если a - точка разрыва первого рода и

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x),$$

то a называется **точкой устранимого разрыва первого рода**.

Классификация точек разрыва

1.2. Если a - точка разрыва первого рода и

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x),$$

то a называется **точкой неустранимого разрыва первого рода**.

Точки разрыва

Классификация точек разрыва

3. Точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется **точкой разрыва второго рода**.

Точка разрыва

Точки разрыва

Точка разрыва

Точка разрыва
первого рода

Точки разрыва

Точка разрыва

Точка разрыва первого рода

Точка разрыва второго рода

Точки разрыва

Точка разрыва

Точка разрыва первого рода

Точка разрыва второго рода

Точка устранимого разрыва

Точки разрыва

Точка разрыва

- Точка разрыва первого рода
  - Точка устранимого разрыва
  - Точка неустранимого разрыва
- Точка разрыва второго рода

Примеры:

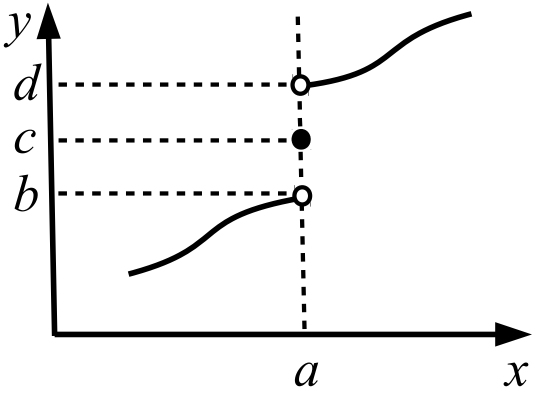
Точки разрыва

Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода

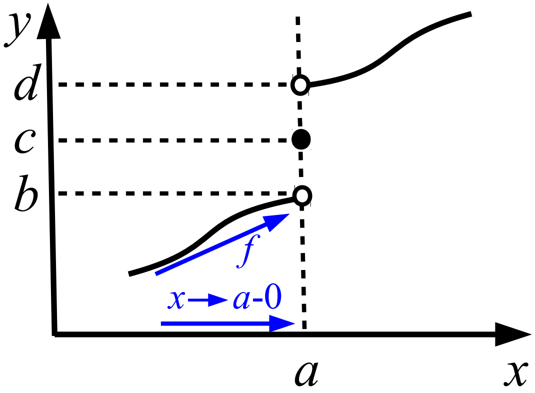
Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода



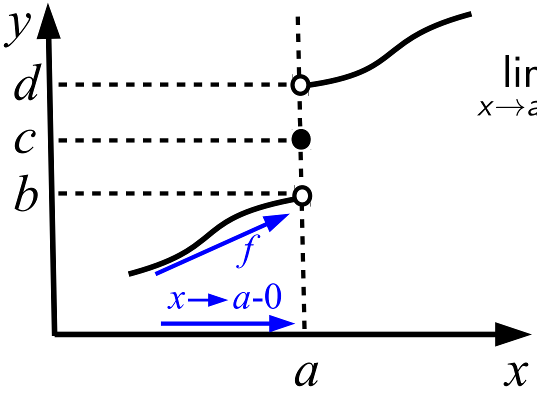
Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода



Примеры:

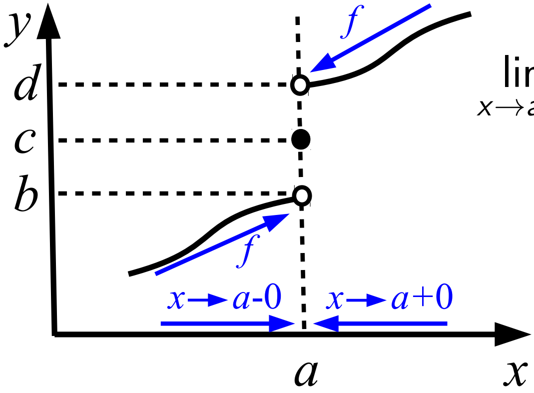
1) точка неустранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$

Примеры:

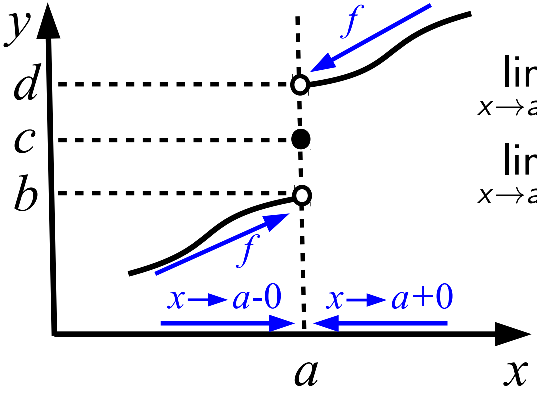
1) точка неустранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$

Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода

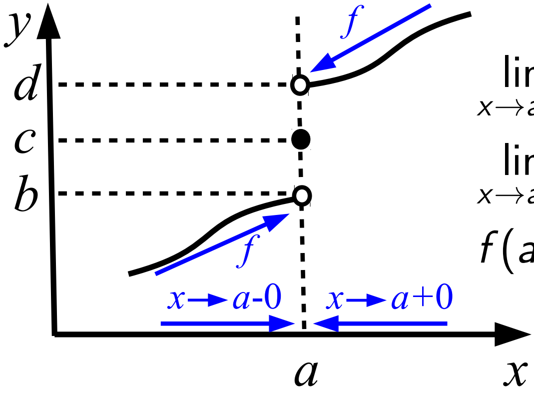


$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = d,$$

Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = d,$$

$$f(a) = c.$$

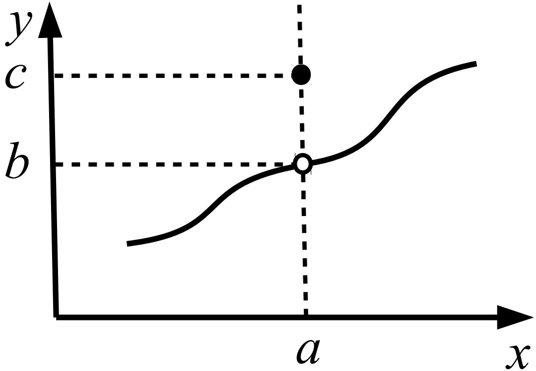
Примеры:

2) точка устранимого разрыва первого рода

Точки разрыва

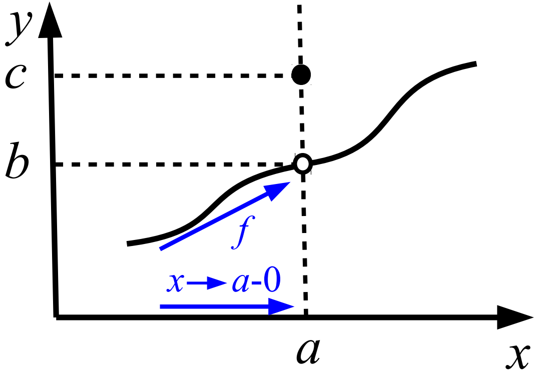
Примеры:

2) точка устранимого разрыва первого рода



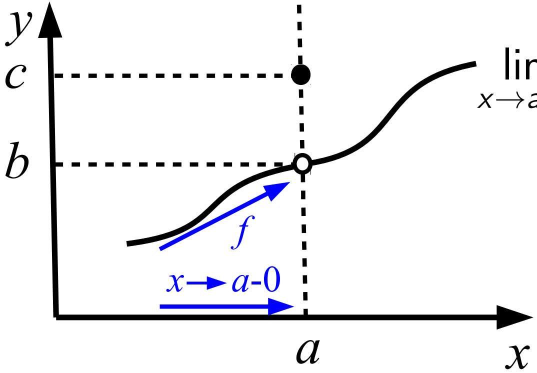
Примеры:

2) точка устранимого разрыва первого рода



Примеры:

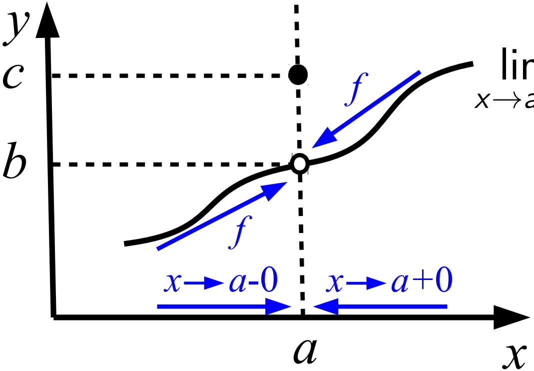
2) точка устранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b,$$

Примеры:

2) точка устранимого разрыва первого рода

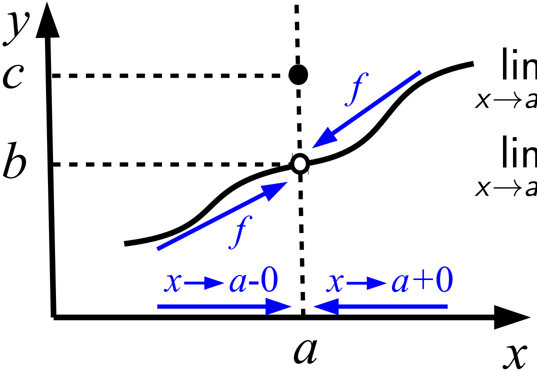


$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$

Точки разрыва

Примеры:

2) точка устранимого разрыва первого рода

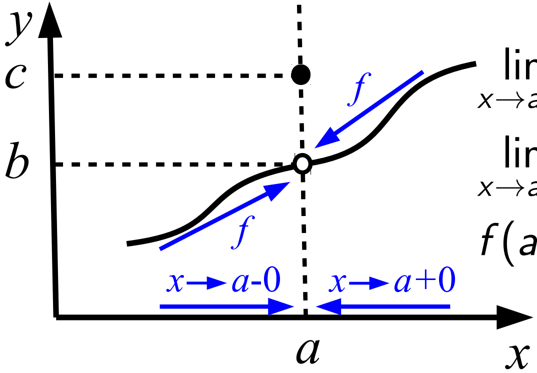


$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b,$$

Примеры:

2) точка устранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b,$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b,$$

$$f(a) = c.$$

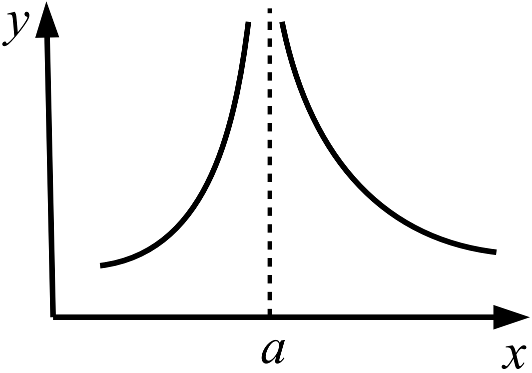
Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва второго рода

Примеры:

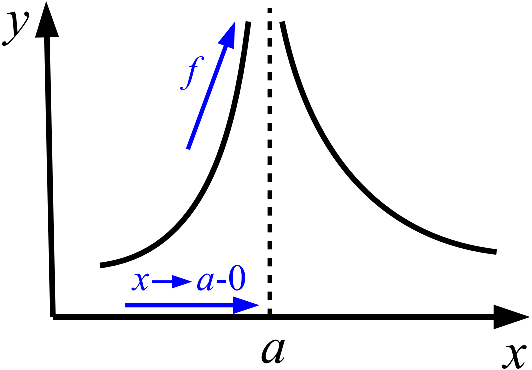
3) точка разрыва второго рода



Точки разрыва

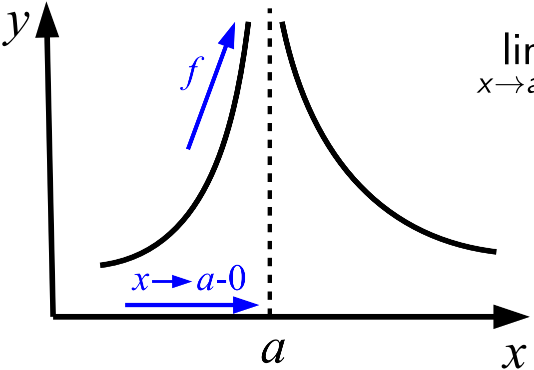
Примеры:

3) точка разрыва второго рода



Примеры:

3) точка разрыва второго рода

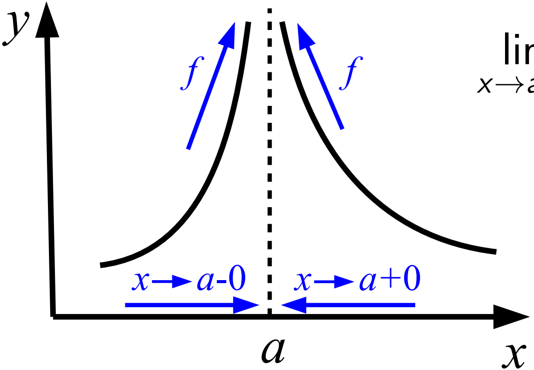


$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty,$$

Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва второго рода

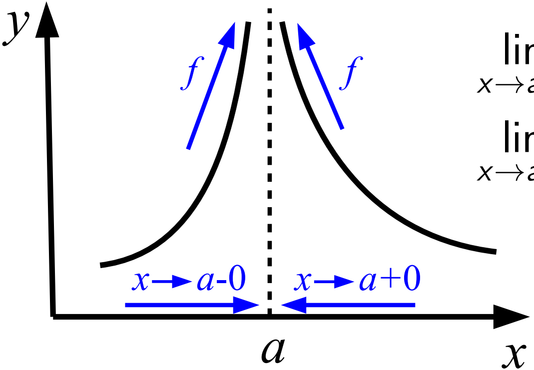


$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty,$$

Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва второго рода



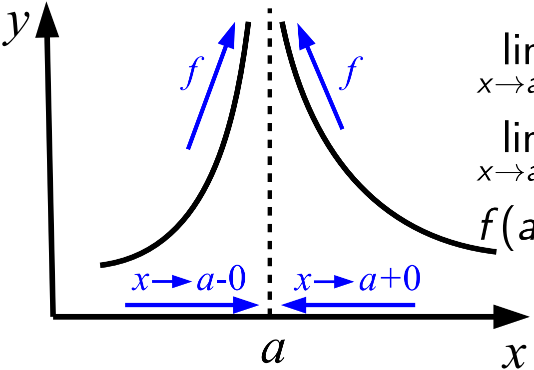
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty,$$

Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва второго рода



$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty,$$

$f(a)$ - неопределена.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f + g \in C(a)$,

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f + g \in C(a)$,

2) $f \cdot g \in C(a)$,

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f + g \in C(a)$,

2) $f \cdot g \in C(a)$,

3) $f/g \in C(a)$, если $g(a) \neq 0$.

Теорема (непрерывность сложной функции)

Теорема (непрерывность сложной функции)
Если $f(x) \in C(a)$ и $g(y) \in C(b)$, где $b = f(a)$, то $g(f(x)) \in C(a)$.

*Теорема (непрерывность основных элементарных функций)**

*Теорема (непрерывность основных элементарных функций)**

Основные элементарные функции непрерывны всюду в их области определения.

Доказательство для $y = \sin x$

Доказательство для $y = \sin x$

Δf

Доказательство для $y = \sin x$

$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$
$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2}$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f$$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) =$$

$= \big|$бесконечно малая $\cdot$ ограниченная $=$ бесконечно малая$\big|$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) =$$

$= \big|$бесконечно малая $\cdot$ ограниченная $=$ бесконечно малая$\big| = 0$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) =$$

$= \big|$бесконечно малая $\cdot$ ограниченная $=$ бесконечно малая$\big| = 0$

$\Rightarrow \sin x \in C(x).$ ■

Теорема (непрерывность элементарной функции)

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (непрерывность элементарной функции)
Любая элементарная функция непрерывна в любой точке области ее определения.