Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Математический анализ

Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Условия сходимости последовательности

Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если

$$\exists b > 0 \; \forall n \in N \colon |x_n| \leq b.$$

Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если

$$\exists b > 0 \ \forall n \in N\colon |x_n| \leq b.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если

$$\exists b \in R \ \forall n \in N\colon x_n \leq b \ (x_n \geq b).$$

Условия сходимости последовательности

*Теорема (необходимое условие сходимости)**

Условия сходимости последовательности

*Теорема (необходимое условие сходимости)**
Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

Условия сходимости последовательности

Доказательство

Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$.

Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. При таком выборе ε из определния предела получаем, что

$$\exists n_1 \ \forall n > n_1\colon |x_n - a| < 1,$$

Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. При таком выборе ε из определния предела получаем, что

$$\exists n_1\ \forall n > n_1\colon |x_n - a| < 1,$$

где n_1 - это $n(\varepsilon)$, вычисленное для $\varepsilon = 1$.

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда

$$|x_1 - a| \le d,\ |x_2 - a| \le d,\ \ldots,\ |x_{n_1} - a| \le d$$

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда

$$|x_1 - a| \le d,\ |x_2 - a| \le d,\ \dots,\ |x_{n_1} - a| \le d$$

и

$$\forall n > n_1\colon\ |x_n - a| < 1 \le d.$$

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$. Тогда

$$|x_1 - a| \le d,\ |x_2 - a| \le d,\ \ldots,\ |x_{n_1} - a| \le d$$

и

$$\forall n > n_1\colon |x_n - a| < 1 \le d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N\colon |x_n - a| \le d.$$

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$. Тогда

$$|x_1 - a| \le d,\ |x_2 - a| \le d,\ \ldots,\ |x_{n_1} - a| \le d$$

и

$$\forall n > n_1\colon\ |x_n - a| < 1 \le d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N\colon\ |x_n - a| \le d.$$

$\Rightarrow -d \le x_n - a \le d$

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$. Тогда

$$|x_1 - a| \leq d,\ |x_2 - a| \leq d,\ \ldots,\ |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1 \colon |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N \colon |x_n - a| \leq d.$$

$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d \Rightarrow a - d \leq x_n \leq a + d$

Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|\}$. Тогда

$$|x_1 - a| \le d,\ |x_2 - a| \le d,\ \dots,\ |x_{n_1} - a| \le d$$

и

$$\forall n > n_1\colon |x_n - a| < 1 \le d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N\colon |x_n - a| \le d.$$

$\Rightarrow -d \le x_n - a \le d \Rightarrow a - d \le x_n \le a + d$

$\Rightarrow$ последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ■

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если

$$\forall n \in N\colon x_n \leq x_{n+1} \; (x_n \geq x_{n+1}).$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если

$$\forall n \in N\colon\ x_n \leq x_{n+1}\ \left(x_n \geq x_{n+1}\right).$$

Определение

Возрастающие и убывающие последовательности называются также **монотонными**.

Условия сходимости последовательности

Теорема (достаточное условие сходимости, теорема Вейерштрасса)

Условия сходимости последовательности

Теорема (достаточное условие сходимости,
теорема Вейерштрасса)
Всякая возрастающая (или убывающая) и ограниченная сверху (или снизу) последовательность имеет конечный предел.

Пример:

Условия сходимости последовательности

Пример:

$x_n = 1 - \dfrac{1}{n},$

Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n \quad x_n < 1$

(ограниченность),

Пример:

$x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$,

$\forall n \;\; x_n < 1$
(ограниченность),

$\forall n \;\; x_n < x_{n+1}$
(возрастание),

Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\forall n \;\; x_n < 1$$

(ограниченность),

$$\forall n \;\; x_n < x_{n+1}$$

(возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n$$

Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\forall n \ \ x_n < 1$$

(ограниченность),

$$\forall n \ \ x_n < x_{n+1}$$

(возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Пример:

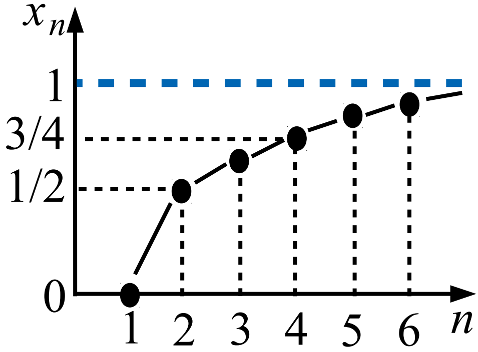
$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n \ \ x_n < 1$ (ограниченность),

$\forall n \ \ x_n < x_{n+1}$ (возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| > \varepsilon.$

Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)\colon \; |x_n| > \varepsilon.$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$

Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall\varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет **бесконечный предел**.

Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$

Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n > \varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n < -\varepsilon$

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$

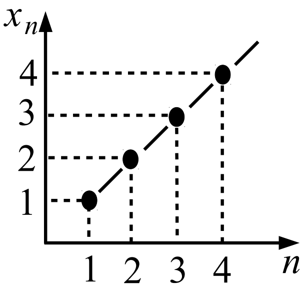
Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$



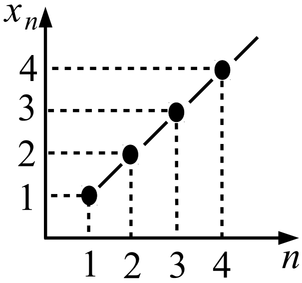
Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

$$x_n = n$$



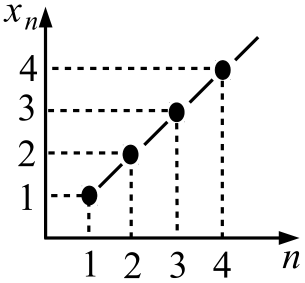
Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$



$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

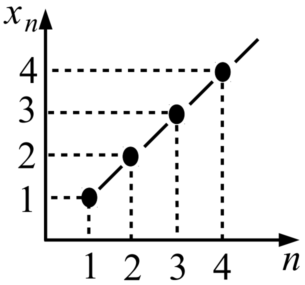
$$x_n = -n$$

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

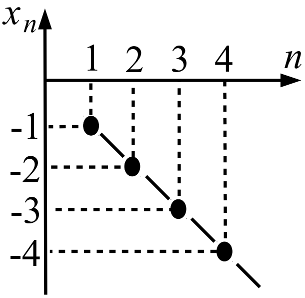
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$



$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

$$x_n = -n$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Общий случай

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$

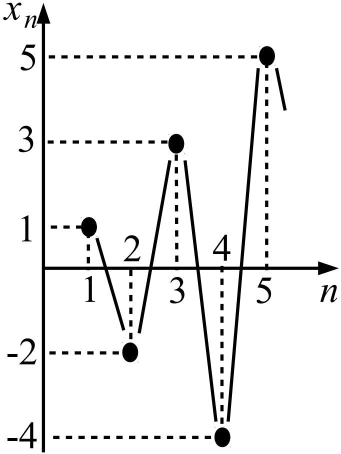
Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности.

Бесконечно большая и малая последовательности

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак “$+$”, если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности,

Бесконечно большая и малая последовательности

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак "$+$", если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак "$-$", если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности.

Бесконечно большая и малая последовательности

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак "$+$", если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак "$-$", если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности. Если направление движения однозначно определить нельзя, то знак перед ∞ не ставится.

Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| < \varepsilon$.

Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

Свойства бесконечно малых последовательностей

Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

3) если $\{x_n\}$ - бесконечно малая, $\{y_n\}$ - ограниченная то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.

Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.
2. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall \boldsymbol{n}$: $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно большая.

Бесконечно большая и малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Бесконечно большая и малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Примеры:

Бесконечно большая и малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Примеры:

$\{n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$\{1/n\}$ - бесконечно малая, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

Теоремы о конечных и бесконечных пределах

В этих теоремах под пределами понимаются как конечный, так и определенного знака бесконечный пределы, т.е. либо число, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Случай, когда предел равен ∞, не рассматривается.

Теорема (единственность предела)

Теорема (единственность предела)
Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{R}$ может иметь на этой прямой только один предел.

Теорема (предельный переход в неравенствах)

Теорема (предельный переход в неравенствах)
Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a \in \overline{R}$, и $\forall n : x_n \le y_n \le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Число e

Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$.

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$. В приближенных вычислениях обычно полагают $e \approx 2.72$.

Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$.

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. Также через e определяются гиперболические функции.

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Число e

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

4) гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Экономическое приложение:

Число e

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов.

Число e

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r.

Число e

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r. По условиям вклада начисление процентов и их капитализация происходит n раз в год.

Экономическое приложение:

Тогда через m лет размер вклада составит

$$K_n = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Число e

Экономическое приложение:

Тогда через m лет размер вклада составит

$$K_n = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Соответственно, при непрерывном начислении процентов и их капитализации мы будем иметь

$$K = \lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n} = S \cdot e^{rm/100}$$