Математический анализ
Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной
Лекция 2.5

Аннотация

Свойства функций, непрерывных в точке (продолжение). Непрерывность функции на промежутке. Наклонные и вертикальные асимптоты графика функции.

1 Свойства функций, непрерывных в точке

*Теорема (локальная ограниченность непрерывной функции)**

Если $f(x) \in C(a)$, то существует такая окрестность точки a, в которой функция $f(x)$ ограничена.

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x-a| < \delta\colon |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(1)$, такое что

$$\forall x \in R, |x-a| < \delta_1\colon |f(x) - f(a)| < 1$$

или

$$\forall x \in U(a, \delta_1)\colon |f(x) - f(a)| < 1.$$

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1)\colon f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1.$$

Это означает, что существует окрестность точки a, в которой функция $f(x)$ ограничена. ■

*Теорема (локальное знакопостоянство непрерывной функции)**

Если $f(x) \in C(a)$ и $f(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки a функция $f(x)$ сохраняет свой знак.

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta \colon |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = f(a)$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(f(a))$, такое что
$$\forall x \in R, |x - a| < \delta_1 \colon |f(x) - f(a)| < f(a)$$
или
$$\forall x \in U(a, \delta_1) \colon |f(x) - f(a)| < f(a).$$

Откуда получаем, что
$$\forall x \in U(a, \delta_1) \colon 0 < f(x) < 2f(a).$$

Это означает, что существует окрестность точки a, в которой $f(x) > 0$, т.е. функция $f(x)$ сохраняет свой знак. Аналогично доказывается для $f(a) < 0$. ■

2 Непрерывность функции на промежутке

Определение

Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется **непрерывной на этом отрезке**.

Обозначение: $f(x) \in C[a, b]$

Теорема (теорема Вейерштрасса)

Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена на этом отрезке и достигает на нем своих точной верхней и точной нижней граней.

Математическая формулировка теоремы:

$$f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists x', x'' \in [a,b]\colon \sup_{[a,b]} f(x) = f(x'),\ \inf_{[a,b]} f(x) = f(x'')$$
$$\text{и } \forall x \in [a,b] : f(x'') \leq f(x) \leq f(x').$$

Теорема (теорема Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции)

Если $f(x) \in C[a,b]$, то для любого числа C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует такая точка $c \in [a,b]$, что $f(c) = C$.

Теорема (о непрерывности обратной функции)

Пусть функция $f(x)$ определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда обратная функция f^{-1} определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.

3 Асимптоты графика функции

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x > a$ (или $x < a$). Если существуют такие числа k и b, что функция $f(x) - (kx + b)$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), то прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$).

Графически асимптота является прямой, расстояние до которой от графика функции стремится к нулю.

Коэффициенты наклонных асимптот находятся по формулам:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx).$$

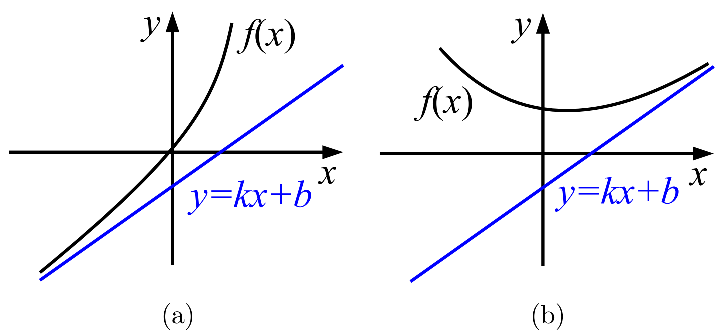

Рис. 1: Левая (a) и правая (b) наклонные асимптоты

Если хотя бы один из коэффициентов k и b равен бесконечности или не существует, то функция не имеет соответствующей наклонной асимптоты.

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a, и пусть выполняется хотя бы одно из условий

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty.$$

Тогда прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$.

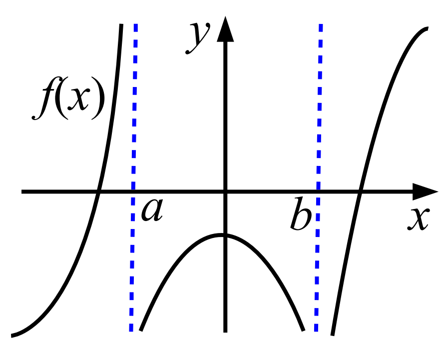

Рис. 2: Вертикальные асимптоты $x = a$ и $x = b$