

Математический анализ

Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

Лекция 2.4

Аннотация

Непрерывность функций. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных в точке.

1 Непрерывность функции

Определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности конечной точки a , называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Эквивалентное определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности конечной точки a , называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке a .

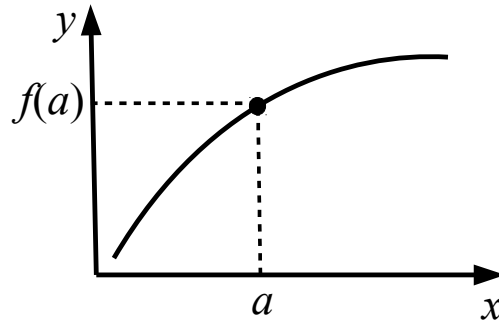
Замечание

Непрерывность функции предполагает, что эта функция определена в некоторой окрестности точки a , включая саму точку a .

Геометрическая интерпретация

Графически непрерывность функции в точке a означает, что ее график в окрестности точки a представляет собой сплошную линию,

которая не претерпевает каких-либо разрывов при переходе через саму точку a .



\Leftrightarrow - знак равносильности и эквивалентности. Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

- 1) необходимо и достаточно,
- 2) тогда и только тогда, когда.

Например, выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как

1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B .

2. Для справедливости утверждения A необходима и достаточна справедливость утверждения B .

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:

1) $A \Rightarrow B$ – если справедливо A , то справедливо B (прямая теорема, необходимое условие),

2) $A \Leftarrow B$ – если справедливо B , то справедливо A (обратная теорема, достаточное условие).

Другими словами, утверждения A и B справедливы или нет одновременно.

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ - приращение аргумента в точке a ,

$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ - приращение функции в точке a .

*Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке)**

$$f(x) \in C(a) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0.$$

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ - Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

\Leftrightarrow - необходимо и достаточно, чтобы

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ - предел приращения функции в точке a равнялся нулю при стремлении к нулю приращения аргумента.

Доказательство

1. *Необходимость.*

Дано: $f(x) \in C(a)$

Доказать: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$

$$f(x) \in C(a)$$

\Downarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Далее,

$$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x \Rightarrow f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta f.$$

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: |\Delta f| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$.

2. *Достаточность.*

Дано: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$

Доказать: $f(x) \in C(a)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

↓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: |\Delta f| < \varepsilon.$$

Так как

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a),$$

то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

↓

$$f(x) \in C(a). \blacksquare$$

2 Односторонняя непрерывность

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, c]$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева** в точке c , если

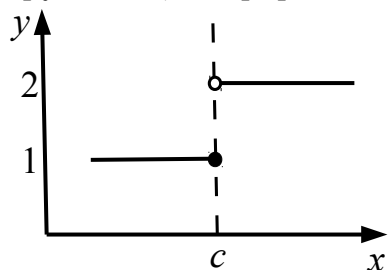
$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c).$$

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[c, b)$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа** в точке c , если

$$\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c).$$

Пример функции, непрерывной слева:



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq c \\ 2, & x > c \end{cases}$$

3 Точки разрыва

Определение

Точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке a или определена, но не является в ней непрерывной.

Классификация точек разрыва

1. Если a - точка разрыва функции $f(x)$ и в этой точке существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

то точка a называется **точкой разрыва первого рода**.

1.1. Если a - точка разрыва первого рода и

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

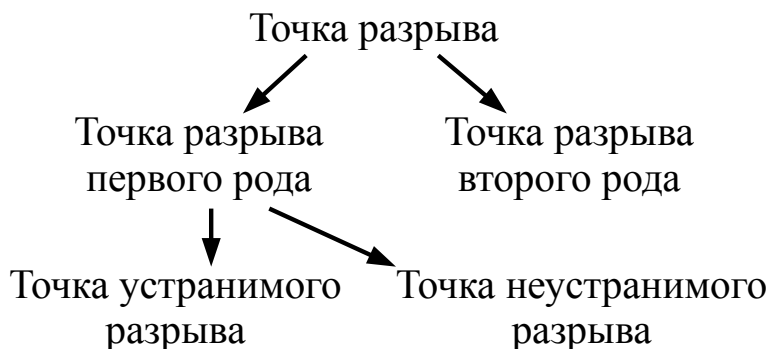
то a называется **точкой устранимого разрыва первого рода**.

1.2. Если a - точка разрыва первого рода и

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

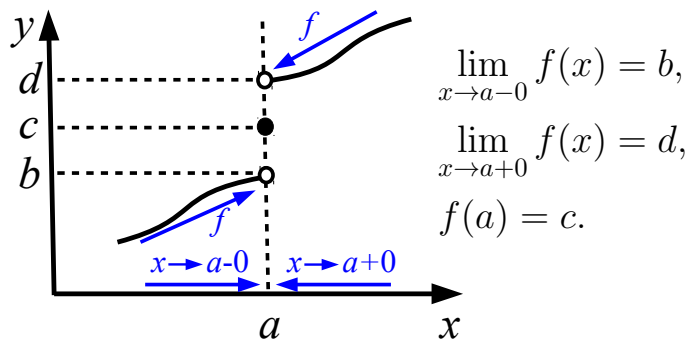
то a называется **точкой неустранимого разрыва первого рода**.

2. Точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется **точкой разрыва второго рода**.

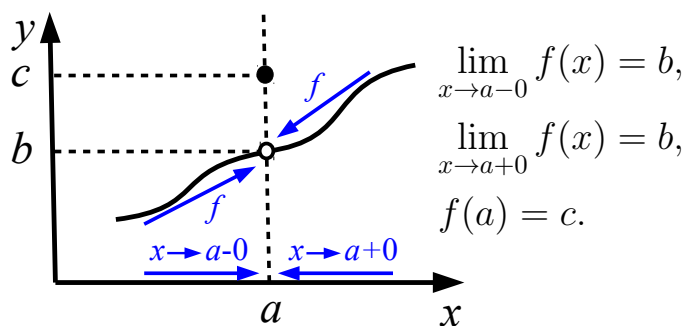


Примеры:

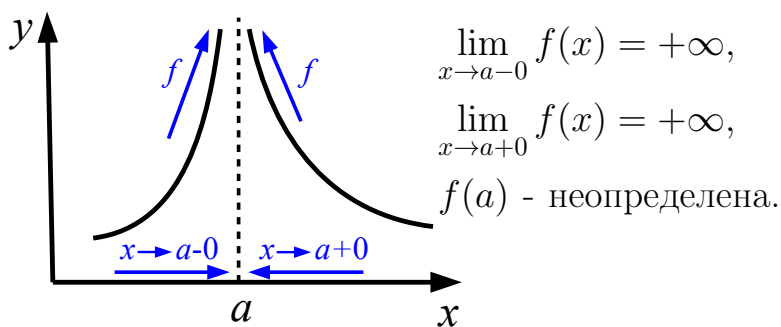
1) точка неустранимого разрыва первого рода



2) точка устранимого разрыва первого рода



3) точка разрыва второго рода



4 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

- 1) $f + g \in C(a)$,
- 2) $f \cdot g \in C(a)$,
- 3) $f/g \in C(a)$, если $g(a) \neq 0$.

Теорема (непрерывность сложной функции)

Если $f(x) \in C(a)$ и $g(y) \in C(b)$, где $b = f(a)$, то $g(f(x)) \in C(a)$.

*Теорема (непрерывность основных элементарных функций)**

Основные элементарные функции непрерывны всюду в их области определения.

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\ &= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \\ &= |\text{бесконечно малая} \cdot \text{ограниченная} = \text{бесконечно малая}| = 0. \\ &\Rightarrow \sin x \in C(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема (непрерывность элементарной функции)

Любая элементарная функция непрерывна в любой точке области ее определения.