Математический анализ
Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной
Лекция 2.1

Аннотация

Окрестность точки. Типы стремления переменной к точке. Предел функции в терминах последовательностей, окрестностей и неравенств. Арифметические свойства пределов. Односторонние пределы.

1 Окрестность точки

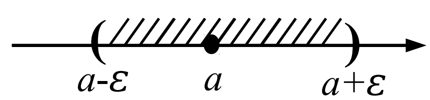
Под точкой понимается как действительное число, так и элементы $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Определение

ε**-окрестность** точки a обозначается как $U(a,\varepsilon)$ и определяется по формулам:

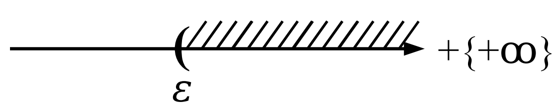
1) a - действительное число

$U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$



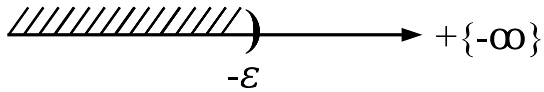
2) $a = +\infty$

$U(+\infty,\varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$



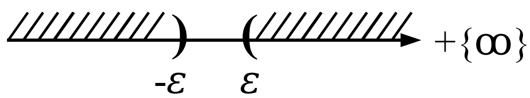
3) $a = -\infty$

$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$



4) $a = \infty$

$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$



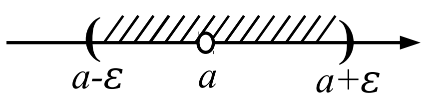
ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε. В этом случае ε просто подразумевается. Обозначения $U(a, \varepsilon)$ и $U(a)$ эквивалентны.

Если a – действительное число, то ее окрестность $U(a)$ также называют **двусторонней окрестностью**.

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a, т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \backslash a.$$



Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность

$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$

2) левосторонняя окрестность

$U_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a], \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a)$

2 Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x, которая принимает последовательно значения $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. В зависимости от вида последовательности $\{x_n\}$ можно выделить несколько типов стремления переменной x к точке a.

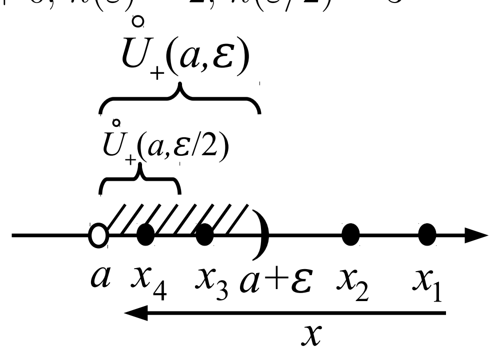
1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \mathring{U}_+(a, \varepsilon)$.

Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример: $x \to a + 0$, $n(\varepsilon) = 2$, $n(\varepsilon/2) = 3$

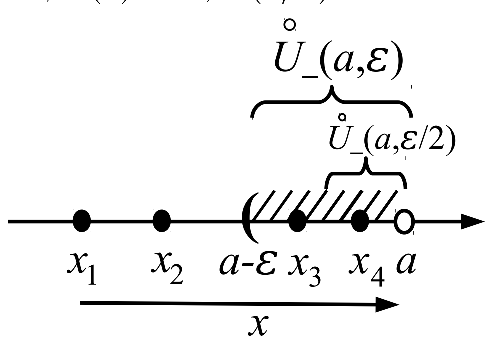


Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

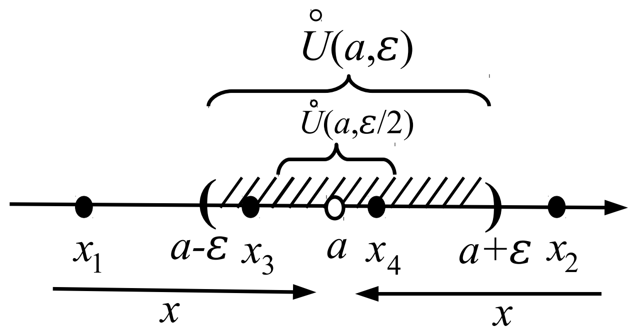
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \mathring{U}_-(a, \varepsilon)$.

Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример: $x \to a - 0$, $n(\varepsilon) = 2$, $n(\varepsilon/2) = 3$



2. Двустороннее стремление
Говорят, что x **стремится** к a, если
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$.
Обозначение: $x \to a$.
Пример: $x \to a$, $n(\varepsilon) = 2$, $n(\varepsilon/2) = 3$



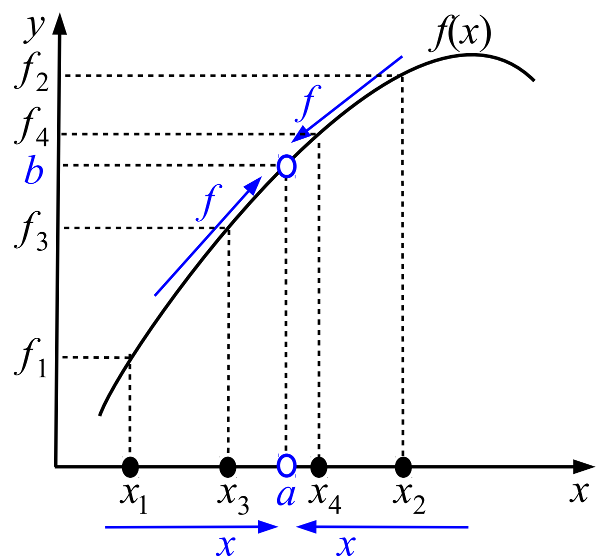
3 Предел функции

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ и пусть $x \to a$, т.е. x последовательно принимает значения x_1, x_2, ..., x_n, ..., которые с ростом n приближаются к точке a. Этой последовательности соответствует последовательность значений функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, ..., которая, в свою очередь, с ростом n приближается к некоторой точке b.

Определение (в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.



В данном определении точки a и b могут быть конечными числами или бесконечностями. Если a - конечное число, то предел также часто называют **двусторонним пределом**.

Сформулируем еще два **эквивалентных** определения предела, которые используются при доказательстве теорем.

Определение (в терминах окрестностей, по Коши)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\forall U(b,\varepsilon)\ \exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)\colon\ f(x) \in U(b,\varepsilon).$$

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b,\varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - для любой точки x из этой окрестности

: - выполняется

$f(x) \in U(b,\varepsilon)$ - значение функции f в точке x принадлежит ε-окрестности точки b

Определение (в терминах неравенств для конечных точек,
на языке $\varepsilon - \delta$)

Конечная точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \to a$, где a - конечная точка, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, 0 < |x-a| < \delta\colon |f(x)-b| < \varepsilon$$

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого действительного числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x-a| < \delta$ - $|x-a|$ больше нуля и меньше δ

: - выполняется

$|f(x)-b| < \varepsilon$ - $|f(x)-b|$ меньше ε

Арифметические свойства пределов

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$
2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$
3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = b/c$, если $c \neq 0$

4 Односторонние пределы

Определение (в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\forall n\ x_n < a$ $(x \to a-0)$, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b.

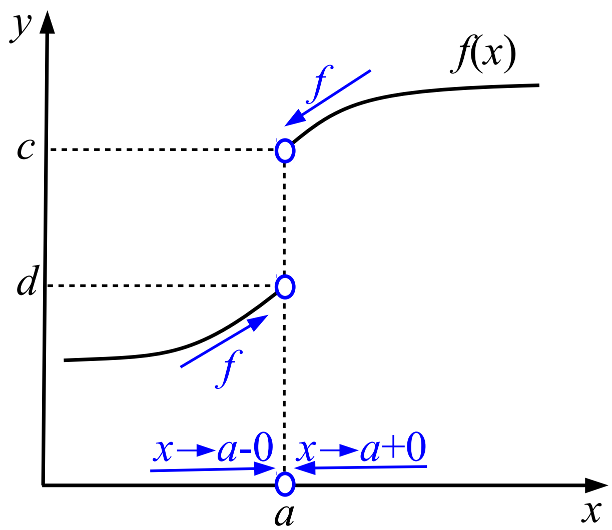
Обозначение: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.

Определение (в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\forall n\ x_n > a$ $(x \to a+0)$, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

Геометрическая интерпретация:



На рисунке $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = c$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = d$.

Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)

Функция $f(x)$ имеет в точке a двусторонний предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы и они равны, причем их общее значение является значением двустороннего предела.