

Математический анализ

Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.3

Аннотация

Необходимое и достаточное условия сходимости. Бесконечно большая последовательность. Бесконечно малая последовательность. Теоремы о конечных и бесконечных пределах. Число ε и гиперболические функции.

1 Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если

$$\exists b > 0 \forall n \in N: |x_n| \leq b.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если

$$\exists b \in R \forall n \in N: x_n \leq b \quad (x_n \geq b).$$

Теорема (необходимое условие сходимости)*

Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Тогда по определению предела имеем: $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in N \forall n > n(\varepsilon): |x_n - a| < \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon = 1$. При таком выборе ε из определения предела получаем, что $\exists n_1 \forall n > n_1: |x_n - a| < 1$, где n_1 - это $n(\varepsilon)$, вычисленное для $\varepsilon = 1$.

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|\}$.

Тогда

$$|x_1 - a| \leq d, |x_2 - a| \leq d, \dots, |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1: |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N: |x_n - a| \leq d.$$

$$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d,$$

$$\Rightarrow a - d \leq x_n \leq a + d,$$

\Rightarrow последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ■

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если

$$\forall n \in N: x_n \leq x_{n+1} \quad (x_n \geq x_{n+1}).$$

Определение

Возрастающие и убывающие последовательности называются также **МОНОТОННЫМИ**.

Теорема (достаточное условие сходимости, теорема Вейерштрасса)

Всякая возрастающая (или убывающая) и ограниченная сверху (или снизу) последовательность имеет конечный предел.

Пример:

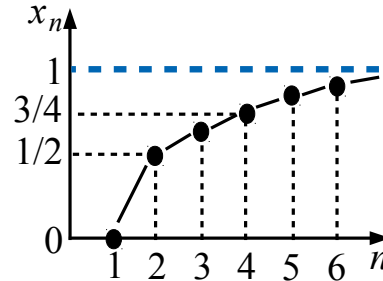
$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n \ x_n < 1$ (ограниченность),

$\forall n \ x_n < x_{n+1}$ (возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$



2 Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > n(\varepsilon): |x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет **бесконечный предел**.

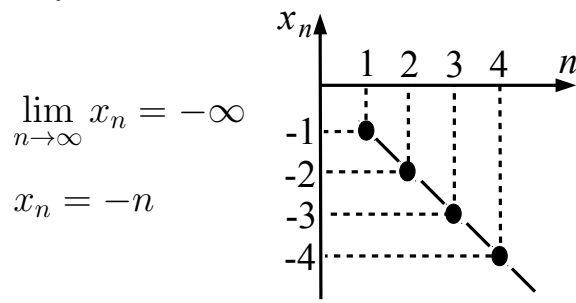
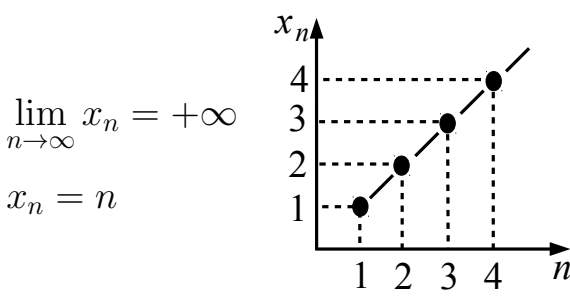
Частные случаи

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > n(\varepsilon): x_n > \varepsilon$

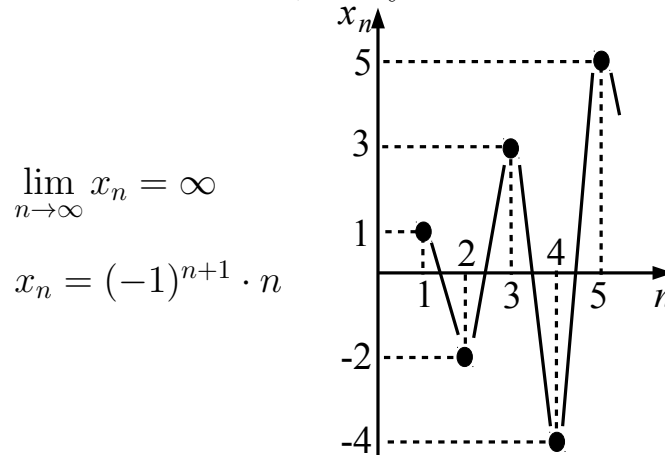
2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > n(\varepsilon): x_n < -\varepsilon$

Примеры:

Частные случаи



Общий случай



Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак “+”, если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак “-”, если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности. Если направление движения однозначно определить нельзя, то знак перед ∞ не ставится.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |x_n| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

3) если $\{x_n\}$ - бесконечно малая, $\{y_n\}$ - ограниченная то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.
2. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall n: x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно большая.

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

Примеры:

$$\begin{aligned} \{n\} &- \text{бесконечно большая, } \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \\ \{1/n\} &- \text{бесконечно малая, } \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0 \end{aligned}$$

3 Теоремы о конечных и бесконечных пределах

В этих теоремах под пределами понимаются как конечный, так и определенного знака бесконечный пределы, т.е. либо число, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Случай, когда предел равен ∞ , не рассматривается.

Теорема (единственность предела)

Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ может иметь на этой прямой только один предел.

Теорема (предельный переход в неравенствах)

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, где $a \in \overline{\mathbb{R}}$, и $\forall n: x_n \leq y_n \leq z_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$

4 Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$. В приближенных вычислениях обычно полагают $e \approx 2.72$.

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. Также через e определяются гиперболические функции:

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

4) гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r . По условиям вклада начисление процентов и их капитализация происходит n раз в год. Тогда через t лет размер вклада составит

$$K_n = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Соответственно, при непрерывном начислении процентов и их капитализации мы будем иметь

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n} = S \cdot e^{rm/100}.$$