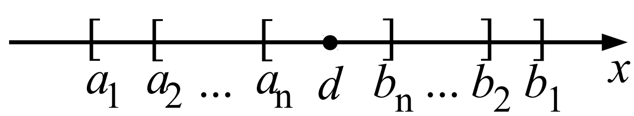
Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей
Лекция 1.2

Аннотация

Принцип вложенных отрезков. Числовая функция. Основные элементарные функции. Элементарная функция. Числовая последовательность и ее предел. Арифметические свойства конечных пределов.

1 Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...



Определение

Система отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... называется **системой вложенных отрезков**, если

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1.$$

Определение

Говорят, что **длина вложенных отрезков стремится к нулю**, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

Расшифровка математических символов:

$\forall\varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n, зависящее от ε, такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n, превосходящего $n(\varepsilon)$

: - выполняется

$|b_n - a_n| < \varepsilon$ - модуль разности b_n и a_n меньше ε.

Теорема (принцип вложенных отрезков)

Для всякой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, ...$ с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка d, которая принадлежит всем отрезкам системы, причем

$$d = sup\{a_n\} = inf\{b_n\}.$$

2 Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел

Обозначение: $y = f(x)$

x - независимая переменная

y - зависимая переменная

$X = D(f)$ - область определения

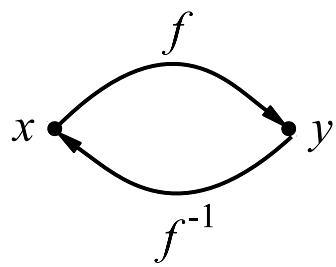
Определение

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x, f(x))$, где $x \in X$.

Определение

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция, ставящая в соответствие каждому числу y соответствующее значение x, называется **функцией, обратной данной**, или **обратной функцией**.

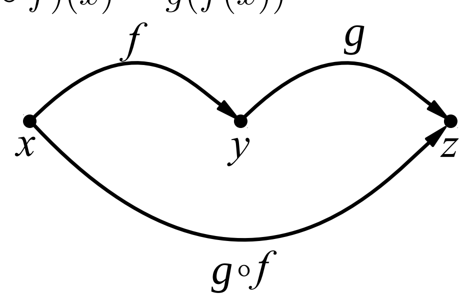
Обозначение: $x = f^{-1}(y)$



Определение

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$. Функция $z = g(f(x))$ называется **сложной функцией** или **композицией функций** или **суперпозицией функций** f и g.

Обозначение: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



3 Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

1) $y = x^\alpha$ - степенная функция

2) $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ - показательная функция

3) $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ - логарифмическая функция

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ - тригонометрические функции

5) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ - обратные тригонометрические функции

Определение

Функция называется **элементарной**, если она задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.

Примеры: $y = 2x^2 + 3x + 5$, $y = sin(2^x)$, $y = \operatorname{tg}\sqrt{x^3 + x^2}$.
Пример функции, которая не является элементарной:

$$y = \begin{cases} x, & x \le 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$$

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)
$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,

2) рациональная функция (дробно-рациональная функция)
$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - полиномы,

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности, т.е. корни различных степеней
$y = x + \sqrt[3]{x}$,

4) трансцендентная функция - это функция, содержащая в себе различные тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.
$y = x + \sqrt{x} + \sin x$.

4 Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$ - числовая последовательность с общим членом a_n.

Определение

Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Примеры: $a_n = 1/2^n$, $a_n = (-1)^n \cdot n^3$.

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность

$a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1,1$, $a_3 = 10 \cdot 1,1^2$,..., $a_n = 10 \cdot 1,1^{n-1}$, ...,

где a_n - размер вклада в течение n-ого года.

Определение

Конечное число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Здесь a - конечное число, т.е. $a \neq \pm\infty$. Поэтому определенный таким образом предел часто называют **конечным пределом**.

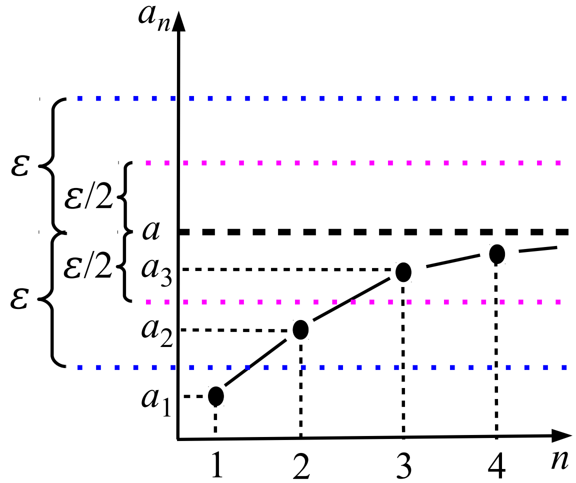
Определение

Если последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**. В противном случае она называется **расходящейся**.

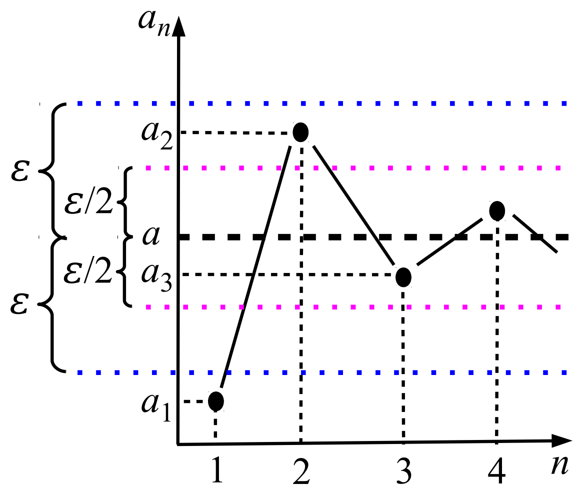
Геометрическая интерпретация сходящейся последовательности:

В определении предела выберем ε так, что $n(\varepsilon) = 1$, $n(\varepsilon/2) = 2$ и $n(\varepsilon/4) = 3$. Тогда $\forall n > 1$: $|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n > 2$: $|a_n - a| < \varepsilon/2$ и $\forall n > 3$: $|a_n - a| < \varepsilon/4$. Приведем два возможных варианта поведения сходящейся числовой последовательности в окрестности числа a:

1) вариант 1



2) вариант 2



*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где a и b – конечные числа. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n) = a/b$, если $b \neq 0$.

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$

По определению предела имеем:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_1(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_1(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon.$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_2(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_2(\varepsilon)\colon |y_n - b| < \varepsilon.$

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ и $|y_n - b| < \varepsilon$, из которых следует

$$|x_n + y_n - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Таким образом, получается

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n + y_n - (a + b)| < 2\varepsilon.$$

Это означает согласно определению предела, что

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b.\ \blacksquare$$