Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Текст 1.3

Аннотация

Однородные системы линейных уравнений: критерий существования ненулевого решения, фундаментальная система решений, структура общего решения. Неоднородные системы линейных уравнений: структура общего решения.

1 Однородные системы линейных алгебраических уравнений

Однородная система линейных алгебраических уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

или

$$AX = O.$$

Однородная система всегда совместна и всегда имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Теорема (критерий существования ненулевого решения однородной системы)

Для того чтобы однородная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был меньше числа неизвестных.

В случае, когда матрица однородной системы A квадратная, из теоремы следует:

1) если $\det A \neq 0$, то система имеет единственное нулевое решение;

2) если $\det A = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение

1. Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У однородной системы нет необходимости рассматривать расширенную матрицу $\widetilde{A}$, т.к. для любой однородной системы всегда выполняется равенство $r(A) = r(\widetilde{A})$, и нулевой столбец свободных членов O остается нулевым при любых элементарных преобразованиях.

2. $r(A) = 2$, $n = 3$. Поскольку $r(A) < n$, система имеет бесконечное множество решений.

3. Выпишем систему уравнений, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ -5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Т.к. $r(A) = 2$, то система имеет 2 базисные неизвестные и 1 свободную неизвестную. В качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2, т.к. минор, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Тогда x_3 будет свободной. Обозначим $x_3 = c$ и перенесем ее в правую часть системы:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -4c, \\ -5x_2 = 3c. \end{cases}$$

4. Отсюда найдем общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -2,2c, \\ x_2 = -0,6c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Теорема (свойство решений однородной системы)

Если вектор-столбцы $X_1, X_2, ..., X_s$ - решения однородной системы, то любая их линейная комбинация также является решением этой системы.

Определение

Фундаментальной системой решений однородной системы называется любой набор $k = n - r$ линейно независимых решений этой системы, где n - количество неизвестных в системе, а r - ранг ее матрицы A

Теорема (о структуре общего решения однородной системы)

Если $F_1, F_2, ..., F_k$ - произвольная фундаментальная система решений однородной системы, то любое ее решение X можно представить в виде

$$X = c_1F_1 + c_2F_2 + ... + c_kF_k,$$

где c_1, c_2, ..., c_k - некоторые постоянные.

Пример. Найти фундаментальную систему решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение

1. Приводим матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -11 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -11 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $r(A) = 2$, $n = 5$. Поскольку $r(A) < n$, система имеет бесконечное множество решений.

3. Выпишем систему уравнений, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -11x_2 + 5x_3 + 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Т.к. $r(A) = 2$, то система имеет 2 базисные неизвестные и 3 свободные неизвестные. В качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2, т.к. минор, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, отличен от нуля. Тогда x_3, x_4, x_5 будут свободными неизвестными. Обозначим $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$ и перенесем их в правую часть системы:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = c_1 + c_2 + c_3, \\ -11x_2 = -5c_1 - 6c_2 - c_3. \end{cases}$$

4. Отсюда найдем общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = (-14c_1 - 19c_2 + 6c_3)/11, \\ x_2 = (5c_1 + 6c_2 + c_3)/11, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из $n - r(A) = 3$ решений. Рассмотрим три набора значений свободных неизвестных:

1) $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$.

Тогда $x_1 = -14/11$, $x_2 = 5/11$, и решение можно записать в виде столбца

$$F_1 = \begin{pmatrix} -14/11 \\ 5/11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$.

При этом $x_1 = -19/11$, $x_2 = 6/11$, и следующее решение системы имеет вид

$$F_2 = \begin{pmatrix} -19/11 \\ 6/11 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$.

Отсюда $x_1 = 6/11$, $x_2 = 1/11$, и последний столбец -

$$F_3 = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 1/11 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Построена фундаментальная система решений F_1, F_2, F_3. Поскольку столбцы свободных неизвестных

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно независимы, это гарантирует линейную независимость решений F_1, F_2, F_3.

Любое решение данной системы имеет вид:

$$X = c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3,$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные. Эта формула задает общее решение системы.

2 Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений

Теорема (о структуре общего решения неоднородной системы)

Пусть вектор-столбец X^*- частное решение неоднородной системы $AX = B$ и известна фундаментальная система решений F_1, F_2, ..., F_k соответствующей однородной системы $AX = O$. Тогда общее решение неоднородной системы можно представить в виде $X = X^* + c_1F_1 + c_2F_2 + ... + c_kF_k$, где c_i $(i = 1, 2, ..., n)$ - произвольные постоянные.

Пример. Найти общее решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$$

с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Решение

Поскольку система неоднородная, то будем приводить к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получили, что $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$, т.е. система совместна. Т.к. число неизвестных $n = 5$ и $r(A) < n$, то система имеет бесконечное множество решений.

Составим по ступенчатой матрице соответствующую однородную систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -3x_2 + x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

и найдем ее общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = (-4c_1 + 3c_2 - 6c_3)/3, \\ x_2 = (c_1 - 6c_2 + 3c_3)/3, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений может быть такой:

$$F_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем какое-нибудь частное решение неоднородной системы. Для этого составим по ступенчатой матрице соответствующую неоднородную систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ -3x_2 + x_3 - 6x_4 + 3x_5 = -1 \end{cases}$$

Положим $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, тогда $x_1 = 5/3$, $x_2 = 1/3$. Следовательно,

$$X_{\text{част.}} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и общее решение системы имеет вид:

$$X = c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3 + X_{\text{част.}} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.