Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра

Лекция 1.3

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

Системы линейных алгебраических уравнений

Определение

Системой из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (сокращенно СЛАУ) называется система вида

Определение

Системой из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (сокращенно СЛАУ) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где

где
числа a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$ - это **коэффициенты** системы,

где

числа a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$ - это **коэффициенты** системы,

числа $b_1, \ldots, b_m$ – **свободные члены**,

где

числа a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$ - это **коэффициенты** системы,

числа $b_1, \ldots, b_m$ – **свободные члены**,

$x_1, \ldots, x_n$ - **неизвестные**, которые надо определить.

Запись СЛАУ в виде (1) называется **координатной**.

Запись СЛАУ в виде (1) называется **координатной**. Эту систему можно записать в **матричной** форме

$$A \cdot X = B, \tag{2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица системы,

Системы линейных алгебраических уравнений

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных,}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ – столбец свободных членов.}$$

Определение

Расширенной матрицей системы (1) называется матрица $\widetilde{A}$ вида

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A} \quad \underbrace{\quad}_{B}$$

Определение

Система (1) называется **однородной**, если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, в противном случае она называется **неоднородной**.

Определение

Решением СЛАУ называется такой набор значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, который при подстановке в каждое уравнение системы (1) обращает его в верное тождество.

Определение

Система (1) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, если решений не имеет.

Определение

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

В последнем случае каждое конкретное решение называется **частным** решением системы.

Определение

Совокупность всех частных решений называется **общим** решением системы.

Определение
Пусть ранг матрицы совместной системы равен r. Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются **базисными**, если коэффициенты при них образуют базисный минор матрицы системы. Остальные $n - r$ неизвестные называются **свободными**.

Критерий совместности СЛАУ

Теорема Кронекера-Капелли
(о совместности СЛАУ)

Критерий совместности СЛАУ

Теорема Кронекера-Капелли
(о совместности СЛАУ)
Для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A был равен рангу ее расширенной матрицы $\widetilde{A}$.

Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Матричный метод решения СЛАУ

Матричный метод решения СЛАУ

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме

$$AX = B. \tag{3}$$

Матричный метод решения СЛАУ

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме

$$AX = B. \tag{3}$$

Здесь матрица A квадратная.

Теорема (о существовании решения)

Матричный метод решения СЛАУ

Теорема (о существовании решения)
Система (3) имеет решение и притом единственное, если определитель матрицы системы $\det A$ отличен от нуля.

Матричный метод решения СЛАУ

Теорема (о существовании решения)
Система (3) имеет решение и притом единственное, если определитель матрицы системы $\det A$ отличен от нуля.

Определение
Если $\det A \neq 0$, то система (3) называется **невырожденной**.

Матричный метод решения СЛАУ

Пусть $\det A \neq 0$.

Матричный метод решения СЛАУ

Пусть $\det A \neq 0$. Умножив обе части уравнения (3) слева на матрицу A^{-1}, получим:

Матричный метод решения СЛАУ

Пусть $\det A \neq 0$. Умножив обе части уравнения (3) слева на матрицу A^{-1}, получим:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{4}$$

Матричный метод решения СЛАУ

Пусть $\det A \neq 0$. Умножив обе части уравнения (3) слева на матрицу A^{-1}, получим:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{4}$$

Отыскание решения системы (3) по формуле (4) называется **матричным методом решения системы**.

Метод Крамера

Метод Крамера

Рассмотрим равенство (4):

Метод Крамера

Рассмотрим равенство (4):

$$X = A^{-1} \cdot B =$$

Рассмотрим равенство (4):

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*} \cdot B =$$

Метод Крамера

Рассмотрим равенство (4):

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*} \cdot B =$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Метод Крамера

По теореме разложения определителя k-ый элемент получившегося вектора есть разложение определителя, полученного из определителя матрицы A заменой k-ого столбца столбцом свободных членов B.

Метод Крамера

Отсюда получаем формулы для вычисления решений системы (3):

Отсюда получаем формулы для вычисления решений системы (3):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{5}$$

Отсюда получаем формулы для вычисления решений системы (3):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{5}$$

где

$$\Delta = \det A,$$

Метод Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Метод Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Метод Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\dots$$

Метод Крамера

Формулы (5) называются **формулами Крамера**, а метод решения невырожденных систем по формулам (5) – **методом Крамера**.

Метод Гаусса

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Метод Гаусса

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Исходная система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

Метод Гаусса

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Исходная система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

2. Обратный ход.

Метод Гаусса

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Исходная система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

2. Обратный ход.

Последовательно, начиная с последнего уравнения ступенчатой системы, находятся все неизвестные.

Пример: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Пример: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Прямой ход

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right)$$

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right) \underset{\sim}{(1)}$$

(1) из второй строки вычитаем первую, умноженную на 2,

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right)$$

(1) из второй строки вычитаем первую, умноженную на 2,

Метод Гаусса

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left.\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}10\\-4\end{matrix}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&10\\0&3&3&-24\end{array}\right)$$

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right)$$

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim}$$

(2) вторую строку делим на 3.

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

(2) вторую строку делим на 3.

2. Находим ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы $\widetilde{A}$ по эквивалентным им ступенчатым матрицам,

Метод Гаусса

2. Находим ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы $\widetilde{A}$ по эквивалентным им ступенчатым матрицам, причем ступенчатая матрица для A получается путем удаления из ступенчатой матрицы для $\widetilde{A}$ последнего столбца.

Метод Гаусса

Получаем, что $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$.

Метод Гаусса

Получаем, что $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$. По теореме Кронекера-Капелли система совместна.

Получаем, что $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$. По теореме Кронекера-Капелли система совместна. Поскольку количество неизвестных $n = 3$ больше ранга матрицы $r(A)$, то система имеет бесконечно много решений.

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A.

Метод Гаусса

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A. Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок.

Метод Гаусса

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A. Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A. Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Метод Гаусса

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A. Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Если бы этот определитель оказался равен нулю, то нам было бы необходимо выбрать другие столбцы.

4. Определяем базисные неизвестные.

4. Определяем базисные неизвестные. Поскольку мы включили в базисный минор первый и второй столбцы, то базисными неизвестными будут x_1 и x_2.

4. Определяем базисные неизвестные. Поскольку мы включили в базисный минор первый и второй столбцы, то базисными неизвестными будут x_1 и x_2. Оставшаяся неизвестная x_3 будет свободной.

5. Выписываем систему уравнений, соответствующую полученной в пункте 1 ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$

6. Положим, что свободная неизвестная $x_3 = c$, где c - произвольная постоянная,

6. Положим, что свободная неизвестная $x_3 = c$, где c - произвольная постоянная, и перенесем в системе уравнений слагаемые, содержащие свободную неизвестную, в правую часть уравнений:

6. Положим, что свободная неизвестная $x_3 = c$, где c - произвольная постоянная, и перенесем в системе уравнений слагаемые, содержащие свободную неизвестную, в правую часть уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 10 - c, \\ \qquad\quad x_2 = -8 - c. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Введение произвольной постоянной c обусловлено тем, что из двух уравнений мы можем однозначно найти лишь две неизвестные, в качестве которых берутся базисные неизвестные x_1 и x_2.

Метод Гаусса

Введение произвольной постоянной c обусловлено тем, что из двух уравнений мы можем однозначно найти лишь две неизвестные, в качестве которых берутся базисные неизвестные x_1 и x_2. Свободная неизвестная x_3 может принимать любые значения, однозначно ее найти нельзя.

Обратный ход

Обратный ход

7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

Обратный ход

7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_2 = -8 - c,$$

Обратный ход

7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_2 = -8 - c,$$
$$x_1 = 10 - c + 2x_2$$

Обратный ход

7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_2 = -8 - c,$$
$$x_1 = 10 - c + 2x_2 = -6 - 3c.$$

8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Данное решение является общим решением системы,

8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Данное решение является общим решением системы, т.е. содержит в себе все частные решения, которые получаются путем придания произвольной постоянной c конкретных значений.

Например, положив $c = 0$, получим конкретное частное решение

$$\begin{cases} x_1 = -6, \\ x_2 = -8, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$