

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.2

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.



Обратная матрица



Обратная матрица

Определение

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель отличен от нуля, и **вырожденной**, если он равен нулю.



Обратная матрица

Определение

Матрицей, **присоединенной** или **союзной** к квадратной матрице A , называется матрица, состоящая из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A , причем алгебраические дополнения элементов i -ой строки записываются в i -ый столбец.



Обратная матрица

Определение

Матрицей, **присоединенной** или **союзной** к квадратной матрице A , называется матрица, состоящая из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A , причем алгебраические дополнения элементов i -ой строки записываются в i -ый столбец.

Обозначение: A^* .



Обратная матрица

Пример:



Обратная матрица

Пример:

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$



Обратная матрица

Пример:

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ то } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$



Обратная матрица

Определение

Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** квадратной матрице A , если выполнено условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A .



Обратная матрица

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы)



Обратная матрица

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы)

Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда исходная матрица A является невырожденной.



Обратная матрица

Свойства обратной матрицы:



Обратная матрица

Свойства обратной матрицы:

$$1) \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A};$$



Обратная матрица

Свойства обратной матрицы:

$$1) \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A};$$

$$2) (A^{-1})^{-1} = A;$$



Обратная матрица

Свойства обратной матрицы:

$$1) \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A};$$

$$2) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$3) (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1};$$



Обратная матрица

Свойства обратной матрицы:

$$1) \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A};$$

$$2) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$3) (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1};$$

$$4) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$



Обратная матрица

Обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$



Обратная матрица

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1} :



Обратная матрица

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1} :

1. Вычислить определитель данной матрицы A .



Обратная матрица

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1} :

1. Вычислить определитель данной матрицы A . Если он отличен от нуля, то обратная матрица существует.



Обратная матрица

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1} :

1. Вычислить определитель данной матрицы A . Если он отличен от нуля, то обратная матрица существует.

2. Вычислить алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и составить из них присоединенную матрицу A^* .



Обратная матрица

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1} :

3. Вычислить обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$



Обратная матрица

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1} :

3. Вычислить обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

4. Сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.



Обратная матрица

Пример:



Обратная матрица

Пример: Найти A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$



Обратная матрица

Решение



Обратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = 2 \neq 0$$



Обратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Алгебраические дополнения:

Решение

$$\det A = 2 \neq 0$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} =$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} =$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} =$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$



Обратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$

Решение

$$\det A = 2 \neq 0$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$A_{13} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{13} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} = -10$$

$$A_{13} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} = -10$$

$$A_{13} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} \del{6} & \del{-1} & \del{-4} \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} = -10$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} = -10$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} =$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} =$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$



Обратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} =$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$

Решение

$$\det A = 2 \neq 0$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$



Обратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$

Решение

$$\det A = 2 \neq 0$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 28$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 11$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} =$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} =$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} =$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$



Обратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$

Решение

$$\det A = 2 \neq 0$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$



Обратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$

Решение

$$\det A = 2 \neq 0$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$



Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$



Обратная матрица

Решение

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$



Обратная матрица

Решение

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$

Присоединенная матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$



Обратная матрица

Решение

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$

Присоединенная матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Обратная матрица

Решение

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$

Присоединенная матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -10 & 28 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$



Обратная матрица

Решение

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$

Присоединенная матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$



Обратная матрица

Решение

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$

Присоединенная матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$



Обратная матрица

Решение

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$



Обратная матрица

Решение

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$



Обратная матрица

Решение

Обратная матрица:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5.5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Обратная матрица

Решение

Обратная матрица:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5.5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Делаем проверку:



Обратная матрица

Решение

Обратная матрица:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5.5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Делаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$



Обратная матрица

Рассмотрим альтернативный способ вычисления обратной матрицы, не требующий вычисления определителей, – **метод элементарных преобразований** (метод Жордана-Гаусса).



Обратная матрица

Алгоритм метода элементарных преобраз.:



Обратная матрица

Алгоритм метода элементарных преобраз.:

1. Проверить, что $\det A$ отличен от нуля.



Обратная матрица

Алгоритм метода элементарных преобраз.:

1. Проверить, что $\det A$ отличен от нуля.
2. Составить матрицу $D = (A|E)$, приписав к исходной матрице A справа единичную матрицу E того же порядка.



Обратная матрица

Алгоритм метода элементарных преобраз.:

3. Элементарными преобразованиями строк преобразовать матрицу D так, чтобы обратить ее левую половину в единичную матрицу, тогда правая половина превратится в обратную матрицу A^{-1} .



Обратная матрица

Алгоритм метода элементарных преобраз.:

3. Элементарными преобразованиями строк преобразовать матрицу D так, чтобы обратить ее левую половину в единичную матрицу, тогда правая половина превратится в обратную матрицу A^{-1} .

4. Сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.



Обратная матрица

Пример:



Обратная матрица

Пример: Найти A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$



Обратная матрица

Решение



Обратная матрица

Решение

$$\det A = 1$$



Обратная матрица

Решение

$$\det A = 1 \neq 0$$



Обратная матрица

Решение

$$\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$



Обратная матрица

Решение

$$\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Составим матрицу D :



Обратная матрица

Решение

$$\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Составим матрицу D :

$$D = (A|E)$$



Обратная матрица

Решение

$$\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Составим матрицу D :

$$D = (A|E) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_A \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \underbrace{\phantom{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}_E$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1) \rightsquigarrow$$

(1) из элементов второй и третьей строк вычитаем соответствующие элементы первой строки;



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(1) из элементов второй и третьей строк вычитаем соответствующие элементы первой строки;



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\stackrel{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\stackrel{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{(2)}{\sim}$$

(2) из элементов третьей строки вычитаем соответствующие элементы второй строки;



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\stackrel{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

(2) из элементов третьей строки вычитаем соответствующие элементы второй строки;



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad (3)$$

(3) элементы третьей строки умножаем на 2 и вычитаем из соответствующих элементов второй строки.



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \stackrel{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

(3) элементы третьей строки умножаем на 2 и вычитаем из соответствующих элементов второй строки.



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \stackrel{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\stackrel{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\stackrel{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) = (E|A^{-1})$$



Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D :

$$\stackrel{(3)}{\sim} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_E \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \right) = (E|A^{-1})$$



Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Делаем проверку:



Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Делаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$



Матричные уравнения



Матричные уравнения

Определение

Матричными уравнениями называются уравнения вида

$$AX = C, XB = C, AXB = C,$$

где A, B, C - известные матрицы, причем A, B - квадратные и невырожденные, а X - неизвестная.



Определение

Решением матричного уравнения называется такая матрица X , которая при подстановке в данное уравнение обращает его в верное тождество.



Матричные уравнения

Матричные уравнения решаются путем умножения их левой и правой частей на матрицу, обратную одной из известных матриц A и B .



Матричные уравнения

Матричные уравнения решаются путем умножения их левой и правой частей на матрицу, обратную одной из известных матриц A и B . Поскольку при умножении матриц множители нельзя менять местами, обе части уравнения умножаются одновременно на обратную матрицу с той стороны, с которой стоит известная матрица.



Матричные уравнения

1. $AX = C.$



Матричные уравнения

1. $AX = C$.

Здесь матрица A стоит слева от X .



Матричные уравнения

1. $AX = C$.

Здесь матрица A стоит слева от X . Поэтому обе части уравнения умножаем на A^{-1} слева:



Матричные уравнения

1. $AX = C$.

Здесь матрица A стоит слева от X . Поэтому обе части уравнения умножаем на A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}C,$$



Матричные уравнения

1. $AX = C$.

Здесь матрица A стоит слева от X . Поэтому обе части уравнения умножаем на A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}C,$$

$$EX = A^{-1}C,$$



Матричные уравнения

$$1. AX = C.$$

Здесь матрица A стоит слева от X . Поэтому обе части уравнения умножаем на A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}C,$$

$$EX = A^{-1}C,$$

$$X = A^{-1}C.$$



$$2. XB = C.$$



Матричные уравнения

2. $XV = C$.

Здесь матрица V стоит справа от X .



Матричные уравнения

$$2. XB = C.$$

Здесь матрица B стоит справа от X . Поэтому обе части уравнения умножаем на B^{-1} справа:

$$XB B^{-1} = C B^{-1},$$



Матричные уравнения

$$2. \quad XB = C.$$

Здесь матрица B стоит справа от X . Поэтому обе части уравнения умножаем на B^{-1} справа:

$$XB B^{-1} = C B^{-1},$$

$$XE = C B^{-1},$$



Матричные уравнения

$$2. XB = C.$$

Здесь матрица B стоит справа от X . Поэтому обе части уравнения умножаем на B^{-1} справа:

$$XB B^{-1} = C B^{-1},$$

$$XE = C B^{-1},$$

$$X = C B^{-1}.$$



3. $AXB = C$.



Матричные уравнения

3. $AXB = C$.

Обе части уравнения умножаем слева на A^{-1}
и справа на B^{-1} :



Матричные уравнения

3. $AXB = C$.

Обе части уравнения умножаем слева на A^{-1}
и справа на B^{-1} :

$$A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$



Матричные уравнения

3. $AXB = C$.

Обе части уравнения умножаем слева на A^{-1} и справа на B^{-1} :

$$A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$



Матричные уравнения

Пример:



Матричные уравнения

Пример: Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$



Матричные уравнения

Пример: Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение:



Матричные уравнения

Пример: Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$



Матричные уравнения

Тогда наше уравнение можно переписать в символьном виде:

$$AX = C.$$



Матричные уравнения

Тогда наше уравнение можно переписать в символьном виде:

$$AX = C.$$

Откуда имеем:

$$X = A^{-1}C.$$



Матричные уравнения

Находим обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$



Матричные уравнения

Находим обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1} \cdot C$$



Матричные уравнения

Находим обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$



Матричные уравнения

Находим обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

