Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.5

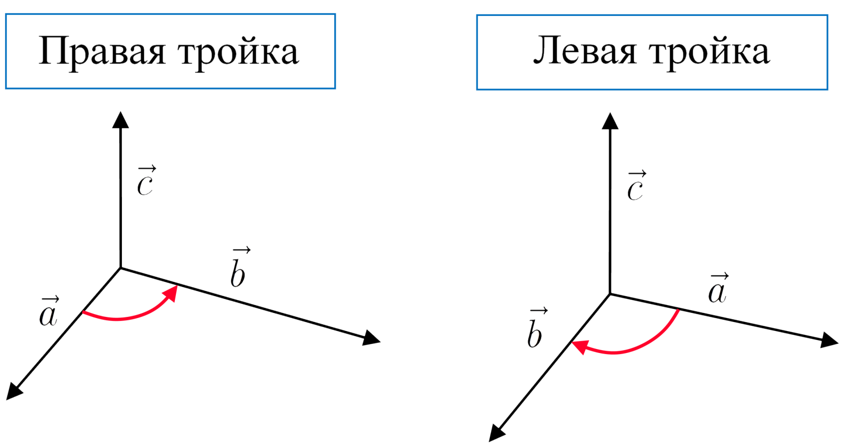
Аннотация

Векторное и смешанное произведения векторов, их свойства и практические приложения.

1 Векторное произведение векторов

Определение

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой.



Так как три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве, то также говорят о **правых** и **левых базисах.** Соответственно, все базисы в пространстве разделяются на два класса: класс правых базисов и класс левых базисов. Класс, к которому относится фиксированный базис, называется его **ориентацией**.

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Алгебраические свойства векторного произведения:

1) антикоммутативный закон

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

2) дистрибутивный закон

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

3) ассоциативный закон относительно числового множителя

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right),\ \lambda \in R.$$

Геометрическое свойство векторного произведения:

Векторное произведение равняется нулевому вектору тогда и только тогда, когда его множители коллинеарны.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}||\vec{b}$$

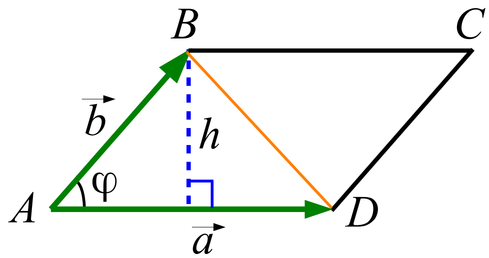
Теорема (векторное произведение в координатной форме)

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Геометрический смысл векторного произведения:

Построим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм $ABCD$:



Площадь параллелограмма $ABCD$ равна

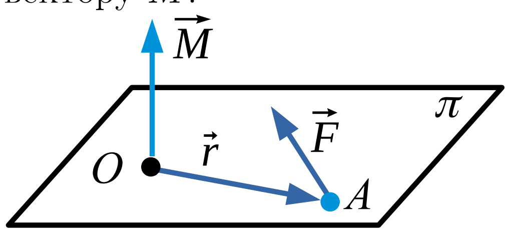
$$S_{ABCD} = AD \cdot h = AD \cdot AB \cdot \sin\varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

В свою очередь, площадь треугольника ABD равна половине площади параллелограмма $ABCD$:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Механический смысл векторного произведения:

Пусть на частицу A действует сила $\vec{F}$. Положение данной частицы в пространстве в каждый момент времени задается ее радиус-вектором $\vec{r}$ относительно некоторой фиксированной точки O (полюса). Вектор $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ называется моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O и характеризует способность силы вращать частицу A вокруг точки O в плоскости π, содержащей точку O и силу $\vec{F}$ и перпендикулярной вектору $\vec{M}$.



Примеры:

I. Найти площадь треугольника с вершинами $A(5;2;-1)$, $B(3;1;-2)$ и $C(4;-2;2)$.

Решение:

1. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3-5; 1-2; -2-(-1)) = (-2;-1;-1),$$
$$\overrightarrow{AC} = (4-5; -2-2; 2-(-1)) = (-1;-4;3).$$

2. Вычислим векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} =$$
$$= -7\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k} = (-7;7;7).$$

3. Найдем площадь треугольника:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2 + 7^2 + 7^2} = \frac{7}{2}\sqrt{3} \text{ (кв. ед)}.$$

II. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 30°.

Решение:

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) =$$
$$= 2(\vec{m} \times \vec{m}) + \vec{m} \times \vec{n} + 4(\vec{n} \times \vec{m}) + 2(\vec{n} \times \vec{n}) =$$
$$= \vec{m} \times \vec{n} - 4(\vec{m} \times \vec{n}) = -3(\vec{m} \times \vec{n}).$$

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |-3(\vec{m} \times \vec{n})| = |-3| \cdot |\vec{m} \times \vec{n}| =$$
$$= 3 \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin 30 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} = 1,5.$$

3. Найдем площадь параллелограмма:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = 1,5 \text{ (кв.ед)}.$$

2 Смешанное произведение векторов

Определение

Если вектор $\vec{a}$ векторно умножить на вектор $\vec{b}$, а полученный вектор скалярно умножить на вектор $\vec{c}$, то получится число, называемое **смешанным произведением** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначение: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Алгебраическое свойство смешанного произведения:

В смешанном произведении знаки векторного и скалярного умножений можно менять местами.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

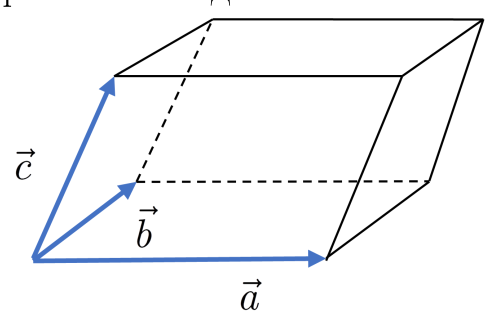
Геометрическое свойство смешанного произведения:

Смешанное произведение равняется нулю тогда и только тогда, когда его множители компланарны.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ компланарны}$$

Геометрический смысл смешанного произведения:

На трех некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, выходящих из одной точки, построим параллелепипед.



Тогда объем построенного параллелепипеда будет численно равен значению смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка векторов правая, и со знаком «минус», если тройка – левая.

Теорема (смешанное произведение в координатной форме)

Пусть заданы три вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приложения смешанного произведения:

1. Взаимная ориентация векторов в пространстве.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая.

2. Объемы параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,$$

а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, есть

$$V_1 = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Пример:

Выяснить, лежат ли точки $M_1(2;5;3)$, $M_2(3;7;4)$, $M_3(-5;5;-1)$, $M_4(-4;-3;0)$ в одной плоскости.

Решение:

1. Найдем векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_1M_4}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3-2; 7-5; 4-3) = (1;2;1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (-5-2; 5-5; -1-3) = (-7;0;-4),$$
$$\overrightarrow{M_1M_4} = (-4-2; -3-5; 0-3) = (-6;-8;-3).$$

2. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) \cdot \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & -4 \\ -6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

Отсюда на основании геометрического свойства смешанного произведения делаем вывод, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$ не являются компланарными, т.е не лежат в одной плоскости. Это значит, что точки M_1, M_2, M_3, M_4 также не лежат в одной плоскости.