Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.2

Аннотация

Вырожденные и невырожденные матрицы. Присоединенная матрица. Обратная матрица и ее свойства. Вычисление обратной матрицы с помощью присоединенной матрицы и с помощью элементарных преобразований. Решение матричных уравнений $AX{=}C$, $XB{=}C$, $AXB{=}C$.

1 Обратная матрица

Определение

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель отличен от нуля, и **вырожденной**, если он равен нулю.

Определение

Матрицей, **присоединенной или союзной** к квадратной матрице A, называется матрица, состоящая из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A, причем алгебраические дополнения элементов i-ой строки записываются в i-ый столбец.

Обозначение: A^*.

Пример:

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Определение

Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** квадратной матрице A, если выполнено условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы)

Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда исходная матрица A является невырожденной.

Свойства обратной матрицы:

1) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;
2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
4) $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$.

Обратная матрица вычисляется по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^{*}$.

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1}:

1. Вычислить определитель данной матрицы A. Если он отличен от нуля, то обратная матрица существует.

2. Вычислить алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и составить из них присоединенную матрицу A^{*}.

3. Вычислить обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^{*}$.

4. Сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Пример: Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1. Находим определитель матрицы A: $\det A = 2$. Так как он отличен от нуля, обратная матрица A^{-1} существует.

2. Составим присоединенную матрицу A^*, вычислив алгебраические дополнения элементов матрицы A. Заметим, что алгебраические дополнения элементов i-ой строки матрицы A записываются в i-ый столбец матрицы A^*.

Алгебраические дополнения первой строки	Алгебраические дополнения второй строки	Алгебраические дополнения третьей строки
$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4$	$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12$	$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$
$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10$	$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 28$	$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4$
$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$	$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 11$	$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$

Из найденных алгебраических дополнений формируем присоединенную матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Находим обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Делаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Рассмотрим альтернативный способ вычисления обратной матрицы, не требующий вычисления определителей, – **метод элементарных преобразований** (метод Жордана-Гаусса).

Алгоритм метода элементарных преобразований:

1. Проверить, что $\det A$ отличен от нуля.
2. Составить матрицу $D = (A|E)$, приписав к исходной матрице A справа единичную матрицу E того же порядка.
3. Элементарными преобразованиями строк преобразовать матрицу D так, чтобы обратить ее левую половину в единичную матрицу, тогда правая половина превратится в обратную матрицу A^{-1}.
4. Сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Пример: Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1. Поскольку $\det A = 1 \neq 0$, обратная матрица A^{-1} существует.
2. Составим матрицу D:

$$D = (A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

3. Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim}$$

$$\overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(E|A^{-1}\right).$$

Проведены следующие элементарные преобразования:

(1) из элементов второй и третьей строк вычли соответствующие элементы первой строки;

(2) из элементов третьей строки вычли соответствующие элементы второй строки;

(3) элементы третьей строки умножили на 2 и вычли из соответствующих элементов второй строки.

Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Делаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2 Матричные уравнения

Определение

Матричными уравнениями называются уравнения вида

$$AX = C,\ XB = C,\ AXB = C,$$

где A, B, C - известные матрицы, причем A, B - квадратные и невырожденные, а X - неизвестная.

Определение

Решением матричного уравнения называется такая матрица X, которая при подстановке в данное уравнение обращает его в верное тождество.

Матричные уравнения решаются путем умножения их левой и правой частей на матрицу, обратную одной из известных матриц A и B. Поскольку при умножении матриц множители нельзя менять местами, обе части уравнения умножаются одновременно на обратную матрицу с той стороны, с которой стоит известная матрица.

1. $AX = C$.

Здесь матрица A стоит слева от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на A^{-1} слева:

$A^{-1}AX = A^{-1}C$,

$EX = A^{-1}C$,

$X = A^{-1}C$.

2. $XB = C$.

Здесь матрица B стоит справа от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на B^{-1} справа:

$XBB^{-1} = CB^{-1}$,

$XE = CB^{-1}$,

$X = CB^{-1}$.

3. $AXB = C$.

Обе части уравнения умножаем слева на A^{-1} и справа на B^{-1}:

$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$,

$X = A^{-1}CB^{-1}$.

Пример: Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда наше уравнение можно переписать в символьном виде:

$$AX = C.$$

Откуда имеем:

$$X = A^{-1}C.$$

Находим обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$