

Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра.

Векторная алгебра

Лекция 1.1

Аннотация

Матрицы. Виды матриц. Линейные операции над матрицами (сложение матриц и умножение матрицы на число) и их свойства. Нелинейные операции над матрицами (умножение матриц и транспонирование матрицы) и их свойства. Элементарные преобразования матриц.

1 Матрицы

Определение

Числовой матрицей размера $m \times n$ (произносится «эм на эн») называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, в которой имеется m строк и n столбцов. Составляющие матрицу числа называются ее **элементами**.

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами A , B , C , ... и записываются в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Здесь a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j . Иногда в обозначении матрицы указывается ее размерность: $A_{m \times n}$, где m - число строк, а n - число столбцов. Часто используется сокращенная запись матрицы: $A = (a_{ij})$.

Пример:

$$A_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет размер 2×4 , т.к. она содержит 2 строки и 4 столбца, ее элемент $a_{23} = 7$ расположен во второй строке и третьем столбце.

2 Виды матриц

Определение

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется **квадратной**, в противном случае - **прямоугольной**.

Определение

Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **матрицей n -ого порядка**.

Определение

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ - **побочную**.

Пример:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Здесь элементы главной диагонали выделены красным цветом, а элементы побочной - синим.

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Определение

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице.

Обозначение: E .

Определение

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**.

Пример:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определение

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**.

Обозначение: O .

Определение

Матрица, состоящая только из одного столбца или одной строки, называется **вектором** (**вектор-столбцом** или **вектор-строкой**).

3 Линейные операции над матрицами

К линейным операциям относятся:

- 1) сложение матриц,
- 2) умножение матрицы на число.

Определение

Две матрицы A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $A = B$.

Определение

Суммой двух матриц одинакового размера A и B называется матрица C , элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B .

Обозначение: $C = A + B$.

Пример:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 3+0 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определение

Произведением матрицы A на число α называется матрица B , каждый элемент которой есть произведение соответствующего элемента матрицы A на число α .

Обозначение: $B = \alpha \cdot A$.

Пример:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$B = 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Свойства линейных операций:

- 1) коммутативный закон сложения матриц

$$A + B = B + A;$$

- 2) ассоциативный закон сложения матриц

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

- 3) ассоциативный закон умножения матрицы на число относительно умножения чисел

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A);$$

- 4) дистрибутивный закон умножения матрицы на число относительно сложения матриц

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

- 5) дистрибутивный закон умножения матрицы на число относительно сложения чисел

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$$

Следствия линейных операций:

1. Матрица $-A$, называемая **противоположной** матрице A , определяется как

$$-A = (-1) \cdot A.$$

2. Матрица $A - B$, называемая **разностью** матриц A и B , определяется как

$$A - B = A + (-B).$$

4 Нелинейные операции над матрицами

К нелинейным операциям относятся:

- 1) умножение матриц,
- 2) транспонирование матрицы.

Определение

Произведением двух матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{n \times k} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times k}$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -ого столбца матрицы B , т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Обозначение: $C = A \cdot B$.

Замечание:

Операция умножения матриц определена, только если число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (смотрите размерности матриц в определении).

Пример: Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если они существуют), когда

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы $A_{2 \times 2}$ совпадает с числом строк матрицы $B_{2 \times 3}$. Значит, матрица $A \cdot B$ существует и имеет размерность 2×3 .

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 10 & 10 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Число столбцов матрицы $B_{2 \times 3}$ отличается от числа строк матрицы $A_{2 \times 2}$. Поэтому матрица $B \cdot A$ не существует.

Свойства операции умножения:

- 1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- 2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$, $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
- 3) $(\alpha A) \cdot B = \alpha(A \cdot B) = A \cdot (\alpha B)$;
- 4) в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$;
- 5) $A \cdot E = E \cdot A = A$, где E - единичная матрица.

Следствие операции умножения:

Матрица A^n , называемая **n -ой степенью** матрицы A , определяется как

$$A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A \text{ (} n \text{ раз)}.$$

При этом полагают, что $A^0 = E$.

Определение

Матрица, полученная из матрицы A путем замены ее строк на столбцы с соответствующими номерами, называется **транспонированной** к A .

Обозначение: A^T .

Пример: Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Свойства операции транспонирования:

- 1) $(A^T)^T = A$;
- 2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- 3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
- 4) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$.

Определение

Квадратная матрица A называется **симметрической (или симметричной)**, если она не изменяется в результате транспонирования, т.е. $A^T = A$.

5 Элементарные преобразования матриц

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

- 1) перестановка местами двух параллельных рядов (строк или столбцов) матрицы;
- 2) умножение всех элементов ряда на число, отличное от нуля;
- 3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда;
- 4) вычитание из элементов ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда.

Определение

Две матрицы A и B называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Обозначение: $A \sim B$.