

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Модуль 4

Домашнее задание
Функции нескольких переменных

Задача 1. Найти повторные пределы функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0)

1	$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, x_0 = \infty, y_0 = \infty.$
2	$f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, x_0 = \infty, y_0 = \infty.$
3	$f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}, x_0 = 0, y_0 = \infty.$
4	$f(x, y) = \frac{\ln(x + y)}{\ln x}, x_0 = 1, y_0 = 0.$
5	$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}, x_0 = 0, y_0 = 0.$
6	$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, x_0 = 0, y_0 = 0.$
7	$f(x, y) = \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, x_0 = \infty, y_0 = \infty.$
8	$f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2(x + y)}, x_0 = \infty, y_0 = \infty.$
9	$f(x, y) = \frac{1}{x} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}, x_0 = 0, y_0 = \infty.$
10	$f(x, y) = \frac{xy}{xy + x - y}, x_0 = 0, y_0 = 0.$
11	$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}, x_0 = 0, y_0 = 0.$
12	$f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^{2y}}, x_0 = +\infty, y_0 = +0.$
13	$f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2(x + y)}, x_0 = \infty, y_0 = \infty.$
14	$f(x, y) = \frac{1}{x} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}, x_0 = 0, y_0 = \infty.$

Задача 2. Найти предел функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0)

1	$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2xy + x - y}, x_0 = 2, y_0 = 2.$
2	$f(x, y) = \frac{\sqrt{1+xy} - 1}{xy(x^2 + 2)}, x_0 = 0, y_0 = 0.$
3	$f(x, y) = \frac{2(x - y)}{x^4 - x^3y + xy^3 - y^4}, x_0 = 1, y_0 = 1.$
4	$f(x, y) = \frac{(x + y)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{9 - (x + y)^2} - 3}, x_0 = 0, y_0 = 0.$
5	$f(x, y) = \frac{4(x + y - 2)}{x^2 + y^2 + 2xy - 4}, x_0 = 2, y_0 = 0.$
6	$f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{1+xy^2} - 1}{xy(y + 2)}, x_0 = 0, y_0 = 0.$
7	$f(x, y) = \frac{6(x^2 - 3x + xy)}{x^2 + y^2 + 2xy - 9}, x_0 = 1, y_0 = 2.$
8	$f(x, y) = \frac{xy + x^2}{(\sqrt[3]{8 - x - 2})(y^2 + 1)}, x_0 = 0, y_0 = 0.$
9	$f(x, y) = \frac{(x - 5)^2 - (y - 5)^2}{(x + y - 10)(x + y)}, x_0 = 5, y_0 = 5.$
10	$f(x, y) = \frac{2 - \sqrt{x^2y + 4}}{x^3y^2 + 4xy}, x_0 = 0, y_0 = 0.$
11	$f(x, y) = \frac{y^2 - 4y - x^2 + 4}{xy + y^2 - 2y}, x_0 = 0, y_0 = 2.$
12	$f(x, y) = \frac{1 - \sqrt{x + y + 1}}{3 - \sqrt{9 + x + y}}, x_0 = 0, y_0 = 0.$
13	$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3 + 3x^2y - 3xy^2}{x^2 - xy}, x_0 = 3, y_0 = 3.$
14	$f(x, y) = \frac{(\sqrt{1 + y} - 1)x^2}{\sqrt{4 + xy} - 2}, x_0 = 0, y_0 = 0.$

Задача 3. Найти частные производные первого и второго порядков функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0)

1	$f(x, y) = \ln(x + y^2 + 1), x_0 = 0, y_0 = 1.$
2	$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x+1}, x_0 = 2, y_0 = 1.$
3	$f(x, y) = \frac{\cos(x+1)^2}{y}, x_0 = -1, y_0 = 1.$
4	$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, x_0 = 0, y_0 = 0.$
5	$f(x, y) = \frac{\operatorname{tg}(x+1)^2}{y}, x_0 = -1, y_0 = 1.$
6	$f(x, y) = \frac{\cos(x-1)^2}{y}, x_0 = 1, y_0 = 1.$
7	$f(x, y) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}, x_0 = 2, y_0 = 2.$
8	$f(x, y) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}, x_0 = 2, y_0 = 4.$
9	$f(x, y) = \ln((x+1)^2 + y^2), x_0 = 0, y_0 = 0.$
10	$f(x, y) = \frac{\sin(x+1)^2}{y}, x_0 = -1, y_0 = 1.$
11	$f(x, y) = \ln(x + y^2 - 1), x_0 = -2, y_0 = 2.$
12	$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-1}, x_0 = 2, y_0 = 1.$
13	$f(x, y) = \frac{\cos(x-1)^2}{y}, x_0 = 1, y_0 = 1.$
14	$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y-1}{1+y-xy}, x_0 = 1, y_0 = 1.$

Задача 4. Найти частные производные и полную производную, если она имеется, данной сложной функции

1	$z = \operatorname{arctg}(2x + 3y), x = (u + v)^2, y = uv.$
2	$z = t^3 \ln(x + y^2), x = \sin^2 t, y = \sqrt{t}.$
3	$z = \arcsin(2x + 3y), x = \sqrt{u^2 + v^2}, y = uv.$
4	$z = \cos(2x + 3y + 2t), x = e^{-3t}, y = \ln t.$
5	$z = x \ln(2x - 3y), x = u^2 + v^2, y = uv.$
6	$z = \sqrt{t} \sin(2x + 3y), x = e^{2t}, y = \ln t.$
7	$z = x^2 \operatorname{tg}(1 + xy), x = u^2 + v^2, y = uv.$
8	$z = y^3 e^{2x+3y}, x = uv, y = (2u + 3v)^2.$
9	$z = t^4 \operatorname{ctg}(2x - 3y), x = \sqrt{t}, y = \ln t.$
10	$z = \operatorname{arctg}(x + 3y), x = (u + v)^3, y = uv.$
11	$z = t^4 \ln(y + x^2), x = \cos^3 t, y = \sqrt{t}.$
12	$z = \arccos(2x + y), x = \sqrt{u + v}, y = uv.$
13	$z = y \ln(3x - 2y), x = u + v, y = uv.$
14	$z = \sqrt[3]{t} \cos(3x + 2y), x = \ln t, y = e^{2t}.$

Задача 5. Найти частные производные функции z , заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$

1	$2x + 3y - 3z + \sin z - 2 = 0$
2	$3x + 2y - 2z - e^z - 1 = 0$
3	$x + 2y - z + \cos z - 2 = 0$
4	$4x + 3y - z - \ln z = 0$
5	$3x - 3y - 2z - \sin^2 z = 0$
6	$x^2 + 3y - z - \sin z - 1 = 0$
7	$3x^2 - 2y + z + e^z + 1 = 0$
8	$2x^2 + 2y - z - \cos z - 3 = 0$
9	$2x + y^2 - z - e^{2z} - 1 = 0$
10	$x^2 - y^2 - z - \sin z = 0$
11	$2x^2 + 2y^2 - z - \ln z - 1 = 0$
12	$3x^2 + y^2 - z - (z - 1)^6 = 0$
13	$xy^2 - z - \sin z - 1 = 0$
14	$2x + y^2 - z - e^{2z} - 1 = 0$

Задача 6. Написать общее уравнение касательной плоскости и канонические уравнения нормали в точке M данной поверхности

1	$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2xy + 4yz = 8, M(0, 2, 0)$
2	$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 5, M(1, 9, 1)$
3	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, M\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$
4	$y + \ln x - \ln z - z = 0, M(1, 1, 1)$
5	$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6, M(1, 2, -1)$
6	$z = \sin \frac{y}{x}, M(1, \pi, 0)$
7	$z = \sqrt{x^2 + y^2}, M(3, 4, 5)$
8	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y, M(0, 1, -2)$
9	$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4x + 4y + 1 = 0, M(2, 0, 1)$
10	$2\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4, M(1, 1, 1)$
11	$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0, M(2, 2, 2)$
12	$\sqrt[4]{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 5, M(1, 4, 4)$
13	$z = 2\operatorname{arctg} \frac{y}{x}, M\left(1, 1, \frac{\pi}{2}\right)$
14	$z = \cos^2 \frac{y}{x}, M\left(4, \pi, \frac{1}{2}\right)$