

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МОДУЛЬ 2: ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Индивидуальное домашнее задание

Общие методические указания:

- Домашнее задание выполняется по вариантам, номер которого соответствует номеру в списке журнала посещаемости занятий.
- Работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней стороне обложки которой должны быть указаны: фамилия и инициалы студента, выполнившего домашнее задание, шифр группы и наименование дисциплины и название домашнего задания.
- Решения задачи начинается с приведения полного текста задания.
- Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. Необходимо привести все вычисления, проделанные по ходу выполнения заданий, ответ.
- Работа над ошибками выполняется в конце работы. Исправления в тексте после проверки работы преподавателем не допускаются.

Критерии оценки: Домашнее задание считается сданным, если правильно решены все задачи. Число баллов, проставляемое за домашнее задание, зависит от количества ошибок, допущенных студентом в ходе выполнения работы, и числа попыток сдачи работы преподавателю до устранения всех ошибок. Итоговое число баллов домашних заданий выбирается из диапазона 11-15.

Составитель: кандидат ф.-м.н.,
доцент кафедры «Высшей математики»
МГТУ им. Н.Э. Баумана
И.В. Меньшова

Задача 2.1. Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора A , заданного матрицей A . Записать диагональный вид матрицы A , если это возможно. (3 балла)

№ варианта	A	№ варианта	A
1	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Задача 2.2. Задана квадратичная форма $\varphi(x)$.

а) Привести $\varphi(x)$ к каноническому (диагональному) виду методом Лагранжа и указать новый базис. Записать матрицу перехода к новому базису.

б) Найти положительный и отрицательный индексы, ранг квадратичной формы $\varphi(x)$.

в) Исследовать $\varphi(x)$ на знакоопределенность двумя способами: по каноническому виду и по критерию Сильвестра. (4 балла)

№ варианта	$\varphi(x)$
1	$x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$
2	$2x_1^2 + 4x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3$
3	$x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
4	$x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$
5	$4x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 14x_2x_3$
6	$4x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 8x_2x_3$
7	$x_1^2 - 3x_2^2 - 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3$
8	$13x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3$
9	$4x_1^2 - 3x_2^2 - 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$
10	$4x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 - 4x_2x_3$

Задача 2.3. Задана квадратичная форма $\varphi(x)$. Привести $\varphi(x)$ к каноническому (диагональному) виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу преобразования. Убедиться, что в этом базисе матрица квадратичной формы является диагональной. (4 балла)

№ варианта	$\varphi(x)$
1	$2x_1^2 - x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 6x_2x_3$
2	$-3x_1^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3$
3	$-8x_1^2 - 3x_2^2 + 12x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$
4	$x_1^2 + x_2^2 - 13x_3^2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3$
5	$3x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 8x_1x_2 - 12x_1x_3 + 12x_2x_3$
6	$4x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$
7	$-10x_1^2 - 2x_2^2 - 10x_3^2 + 6x_1x_2 - 18x_1x_3 + 6x_2x_3$
8	$2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3$
9	$2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
10	$3x_1^2 + 8x_2^2 + 3x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 12x_2x_3$

Задача 2.4. Используя теорию квадратичных форм, исследовать кривую второго порядка, заданную общим уравнением и построить ее. (4 балла)

№ варианта	Уравнение кривой
1	$7x^2 - 6xy + y^2 = 4$
2	$-x^2 + 10xy - y^2 = 9$
3	$4x^2 + 10xy + 4y^2 = 3$
4	$-3x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$
5	$-8x^2 - 8xy + 7y^2 = 9$
6	$3x^2 - 6xy - 5y^2 = 2$
7	$-x^2 - 4xy - y^2 = 3$
8	$-x^2 - 4xy + 2y^2 = 12$
9	$4x^2 + 4xy + 7y^2 = 6$
10	$-4x^2 + 10xy - 4y^2 = 3$