Нахождение обратной матрицы

К. Койфман*

30 марта 2021 г.

1 Введение

Понятие матрицы (т.е., прямоугольной таблицы, элементами которой, как правило, являются числа), позволило в лаконичной форме записать систему линейных алгебраических уравнений. Матрицы возникают при работе с координатными представлениями объектов, обладающих свойством линейности (векторы, линейные преобразования) и потому являются одним из кирпичиков, без которых нельзя освоить современную математику.

В курсах геометрии и линейной алгебры часто возникает необходимость в решении уравнения

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A — матрица размера $n \times n$ (иными словами, матрица состоит из n строк и n столбцов), а x и y — столбцы из n строк. Предполагается, что матрицы A и y известны, а матрица x — неизвестна. Используя понятие обратной матрицы, можно представить решение x уравнения (1) в виде

$$x = A^{-1}y,$$

где A^{-1} — обратная матрица. Таким образом, понятие обратной матрицы является важным: оно позволяет записать решение системы линейных уравнений. Цель настоящего текста — помочь вам научиться находить обратную матрицу.

Начнём с определения. Пусть A — матрица размера $n \times n$.

Определение 1. *Матрица B, имеющая тот же размер $n \times n$, что и A, называется* ***обратной к*** *A, если выполнены равенства*[1]

$$AB = BA = E. \tag{2}$$

Здесь E — единичная матрица[2] размера $n \times n$. Обратите внимание, что, в общем случае, произведение произвольных матриц A и B некоммутативно, т.е., $AB \neq BA$. Формула (2), таким образом, требует, чтобы относительно исходной матрицы A и обратной матрицы B произведение было коммутативно (перестановочно).

Прежде чем двигаться дальше, давайте внимательно посмотрим на равенства (2).

- **Понятие обратной матрицы определено лишь для квадратных матриц.** Почему мы заранее оговаривали, что исходная матрица A и обратная к ней, B, должны быть квадратными и иметь одинаковый размер? Во-первых, когда перемножаются две матрицы, то

*Пожалуйста, присылайте замечания на koifman.konstantin@gmail.com

[1] Произведение матриц A и B можно обозначать тремя способами: $A \cdot B$, AB и $A.B$ (последний способ иногда встречается в англоязычной литературе и приведен для справки).

[2] То есть, матрица, элементы которой на главной диагонали равны 1, а элементы на остальных местах — 0.

число столбцов первого сомножителя должно быть равно числу строк второго сомножителя. Пусть матрица A имеет размер $m \times k$, а матрица B имеет размер $r \times p$. Тогда для существования произведения AB требуется, чтобы $k = r$, а для существования произведения BA должно выполняться равенство $p = m$. Во-вторых, в силу (2), каждое из произведений должно быть равно квадратной матрице E размера, скажем, $n \times n$. Поэтому[3], поскольку AB имеет размер $m \times m$, то мы получаем, что $m = n$ и поскольку BA имеет размер $r \times r$, то $r = n$. Окончательно, $m = k = r = p = n$ и матрицы A и B являются квадратными, размера $n \times n$. По этой причине, не имеет смысла в рамках определения (2) говорить об обратной к произвольной прямоугольной матрице.

- **Если для матрицы A существует обратная матрица, то она единственна.** Действительно, пусть B_1 и B_2 — матрицы, обратные к A. Это означает, что одновременно выполнены равенства
$$AB_1 = B_1A = E \quad \text{и} \quad AB_2 = B_2A = E.$$
Тогда, используя свойства произведения матриц, получаем[4]:
$$B_1 = B_1E = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2.$$
Таким образом, $B_1 = B_2$. По этой причине, для матрицы, обратной к A, используется обозначение[5] A^{-1}.

- **Определитель матрицы A и определитель обратной матрицы A^{-1} взаимно обратны:** $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$**.** Действительно, применяя операцию det взятия определителя к равенству $AA^{-1} = E$, получаем
$$\det(AA^{-1}) = \det E.$$
Как вы знаете из теории определителей, определитель произведение равен произведению определителей, а определитель единичной матрицы равен 1. Поэтому,
$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1,$$
что влечет равенство $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$. В частности, это означает, что мы можем говорить об обратной матрице только, если определитель исходной матрицы отличен от нуля. Это условие также и достаточно для существования A^{-1}, о чем более подробно будет сказано далее.

Мы перечислили не все свойства, связанные с обратной матрицей, а лишь самые элементарные. Остальные свойства вы найдете в учебнике[6].

[3] Равенство двух матриц означает, что 1) матрицы имеют одно и то же число строк и одно и то же число столбцов и 2) элементы, стоящие на одинаковых местах, равны.

[4] Первое равенство вытекает из того, что домножение некоторой матрицы на единичную не меняет исходную матрицу ($B_1E = B_1$). Во втором равенстве мы воспользовались определением обратной матрицы ($AB_2 = E$). В третьем равенстве мы переставили скобки ($B_1(AB_2) = (B_1A)B_2$) и, наконец, в четвертом равенстве мы снова использовали определение обратной матрицы ($B_1A = E$).

[5] Может возникнуть искушение писать $\dfrac{1}{A}$ вместо A^{-1}. Но это было бы **ошибкой**. Деление на матрицы не определено.

[6] См., например, Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. — 387 с.

2 Нахождение обратной матрицы по присоединённой матрице

Пусть имеется матрица A размера $n \times n$. Мы предполагаем, что её определитель отличен от нуля ($\det A \neq 0$), так как в противном случае обратной матрицы не существует.

Изучая теорию определителей, вы познакомились с такими понятиями, как дополнительный минор и алгебраическое дополнение. Здесь они нам также понадобятся. Напомним, что **дополнительным минором** M_{ij} **матрицы** A называется определитель, получающийся из исходной матрицы A путём вычёркивания i-й строки и j-го столбца. Проще понять это определение на примерах. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Тогда

$$M_{11} = d, \quad M_{12} = c, \quad M_{21} = b, \quad M_{22} = a$$

(например, M_{12} получается из A вычёркиванием 1-й строки и 2-го столбца; тогда остаётся элемент c). Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

то миноры имеют вид (выписаны лишь некоторые из них):

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} **матрицы** A называется число A_{ij}, определяемое формулой

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

В случае матрицы (3),

$$A_{11} = M_{11} = d, \quad A_{12} = -M_{12} = -c, \quad A_{21} = -M_{21} = -b, \quad A_{22} = M_{22} = a.$$

Обратите внимание, что перед минором появляется знак «минус», если $i + j$ — нечётное число. Совершенно аналогично вычисляются алгебраические дополнения для матрицы (4):

$$A_{11} = M_{11}, \quad A_{23} = -M_{23}, \quad A_{33} = M_{33}.$$

Обозначим матрицу, элементами которой являются алгебраические дополнения A_{ij}, через C, то есть[7],

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Всё готово для того, чтобы выписать основную формулу настоящего раздела. Обратная матрица A^{-1} может быть получена согласно равенству[8]

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*, \tag{5}$$

[7]В англоязычной литературе для алгебраических дополнений A_{ij} часто используется термин «cofactor». Матрица C иногда обозначается через $\mathrm{Cof}\, A$ и называется «cofactor matrix».

[8]Это не определение, а теорема. Её доказательство можно найти в учебнике.

где $A^* = C^T$ — **присоединённая матрица**, получаемая как транспонирование матрицы C (строки C переходят в столбцы с сохранением порядка):

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Формула (5) показывает, в частности, что отличие от нуля определителя матрицы A является достаточным для того, чтобы обратная матрица A^{-1} существовала.

Таким образом, обратную матрицу можно получить, действуя по следующему алгоритму:

(1) Вычисляем определитель матрицы A. Если он равен нулю, то обратной матрицы не существует и дальнейшие пункты алгоритма выполнять не надо. Если определитель матрицы A отличен от нуля, то переходим к следующему шагу алгоритма.

(2) Вычисляем алгебраические дополнения A_{ij} и составляем матрицу C, на i-й строке и j-м столбце которой стоит элемент A_{ij}.

(3) Транспонируем матрицу C, что даёт присоединённую матрицу $A^* = C^T$.

(4) Вычисляем A^{-1} по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$.

После выполнения шага (4) следует сделать проверку, то есть, вычислить произведение AA^{-1} , либо $A^{-1}A$. В обоих случаях должна получиться единичная матрица E.

Рассмотрим применение алгоритма на примерах.

Пример 1. *Матрица A равна*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A равен нулю, то есть, $\det A = 0$. *Следовательно, не существует обратной матрицы для A.*

Пример 2. *Матрица A имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A равен $\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$. *Следовательно, обратная матрица для A существует. Переходим ко второму шагу алгоритма. Алгебраические дополнения представлены равенствами*

$$A_{11} = 4, \quad A_{12} = -3, \quad A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1.$$

Следовательно, матрица C равна

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переходим к третьему шагу алгоритма. Транспонируем матрицу C:

$$A^* = C^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, на финальном шаге, определяем A^{-1} по формуле (5)*:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Делаем проверку:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot \dfrac{3}{2} & 1 \cdot 1 + 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \\ 3 \cdot (-2) + 4 \cdot \dfrac{3}{2} & 3 \cdot 1 + 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Теперь, более сложный пример:

Пример 3. *Матрица A равна*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

Вычисляем определитель: $\det A = -1$*. Поскольку определитель отличен от нуля, то обратная матрица существует. Находим алгебраические дополнения:*

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$
$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Алгебраические дополнения образуют матрицу C:

$$C = \begin{pmatrix} -9 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонируя матрицу C, получаем присоединённую матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = -\begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -3 \\ -7 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверку сделайте самостоятельно.

3 Метод Жордана – Гаусса

Использование формулы (5) требует вычисления определителей. Вместе с тем, существует другой метод, основанный на применении лишь операций сложения и умножения чисел. Этот метод удобно реализовать на ЭВМ, поэтому мы также его разберем. Пусть A — некоторая матрица (необязательно квадратная).

Определение 2. ***Элементарным преобразованием строк матрицы*** *A называют любое из следующих действий:*

- *перестановка местами любых двух строк A;*
- *прибавление к любой строке матрицы A другой строки, умноженной на некоторое число;*
- *умножение любой строки на ненулевое число.*

Пусть теперь A — невырожденная матрица размера $n \times n$. Метод Жордана – Гаусса (определение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований) заключается в следующем. Составляется **расширенная матрица**

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right).$$

Над ее строками последовательно производятся элементарные преобразования так, чтобы матрица A превратилась в единичную. То есть, в результате элементарных преобразований должна получиться матрица

$$(E|B) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right).$$

Тогда $A^{-1} = B$. Алгоритм действий содержит n (по числу строк) этапов:

(1) **a.** Переставляя строки матрицы $(A|E)$, если надо, добиваемся того, чтобы в первой строке и первом столбце (т.е., на месте[9] $(1, 1)$) расширенной матрицы $(A|E)$ стоял отличный от нуля элемент[10]. Обозначим этот элемент через a.

b. Делим первою строку расширенной матрицы $(A|E)$ на a; таким образом, на месте $(1, 1)$ будет стоять 1.

c. Из второй, третьей, ..., n-й строки матрицы $(A|E)$ вычитаем первую строку, умноженную на такое число (оно равно элементу, стоящему, соответственно, на месте $(2, 1)$, ..., $(n, 1)$), чтобы под элементом с номером $(1, 1)$ стояли лишь одни нули. Переходим к следующему этапу.

(2) Обозначим результат преобразований после первого этапа через $(A_1|B_1)$.

a. Переставляя строки $(A_1|B_1)$, если надо (но не трогая первую строку!), добиваемся того, чтобы на месте $(2, 2)$ стоял отличный от нуля элемент. Обозначим его через b.

b. Делим вторую строку матрицы $(A_1|B_1)$ на b; тогда на месте $(2, 2)$ будет стоять 1.

c. Из первой, третьей, ... n-й строки матрицы $(A_1|B_1)$ вычитаем вторую строку, умноженную на такое число (т.е. на элемент, стоящий, соответственно, на месте $(1, 2)$, ..., $(n, 2)$), чтобы во втором столбце матрицы $(A_1|B_1)$, за исключением элемента на месте $(2, 2)$, стояли лишь одни нули. Переходим к следующему этапу.

$\vdots$

(n) Обозначим результат преобразований после $(n - 1)$-го этапа через $(A_{n-1}|B_{n-1})$.

[9]В алгоритме и далее символ (i, j) обозначает место, соответствующее i-й строке и j-му столбцу.

[10]Хотя бы один такой элемент найдется в первом столбце, поскольку матрица A невырождена (определитель отличен от нуля).

a. Деля n-ю строку матрицы $(A_{n-1}|B_{n-1})$ на элемент, стоящий на месте (n, n), добиваемся того, чтобы на этом месте стояла[11] 1.

b. Из первой, второй, ..., $(n-1)$-й строки матрицы $(A_{n-1}|B_{n-1})$ вычитаем n-ю строку, умноженную на такое число (т.е. на элемент, стоящий, соответственно, на месте $(1, n)$, ... $(n-1, n)$), чтобы в n-м столбце матрицы $(A_{n-1}|B_{n-1})$, за исключением элемента на месте (n, n), стояли лишь одни нули.

После выполнения всех этапов приходим к матрице $(A_n|B_n) = (E|B)$, где $B = A^{-1}$.

Действия алгоритма могут показаться сложными. Но, на самом деле, как будет показано на примерах, эта сложность кажущаяся. Начнём с простого.

Пример 4. *Пусть матрица A имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составляем расширенную матрицу:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Согласно алгоритму, первую строку матрицы $(A|E)$ нужно поделить на 2, чтобы получить единицу на месте $(1, 1)$. Но можно этого не делать. Переставляя строки, получим

$$S_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

и на месте $(1, 1)$ стоит 1. Вычитая из второй строки матрицы S_1 первую, умноженную на 2, придем к матрице

$$S_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Поделим вторую строку матрицы S_2 на -6; это даст матрицу

$$S_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Наконец, вычтем из первой строки матрицы S_3 вторую строку, умноженную на 5. Это приведет к матрице

$$(E|B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Таким образом,

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Не забудьте сделать проверку.

Более сложный пример:

[11] Конечно, если на месте (n, n) уже стоит 1, то действие «а» делать не нужно.

Пример 5. *Матрица A имеет вид:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ей соответствует расширенная матрица

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Нам повезло: на месте $(1,1)$ уже стоит единица. Вычитая из второй строки первую, умноженную на 3, и из третьей строки первую, получаем матрицу

$$S_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Домножая вторую строку матрицы S_1 на $-\dfrac{1}{2}$, приходим к новой матрице:

$$S_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{7}{2} & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Вычитая из первой строки матрицы S_2 вторую, умноженную на 2, получаем (из третьей строки вычитать ничего не нужно: там уже стоит 0 на месте $(3,2)$)

$$S_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{7}{2} & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Наконец, добавим к первой строке матрицы S_3 третью, умноженную на 4 и добавим ко второй строке той же матрицы третью, умноженную на $-\dfrac{7}{2}$. Это даст матрицу

$$(E|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 \\ 5 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{7}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Самостоятельно проверьте, что получен правильный результат.

В примерах матрицы были невырождены (определители отличны от нуля). Что случится, если применить метод элементарных преобразований к вырожденной матрице? В таком случае, на каком-то этапе не найдется отличного от нуля элемента на месте (k,k). Следующий пример иллюстрирует эту ситуацию:

Пример 6. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая расширенная матрица равна

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Вычтем из второй строки расширенной матрицы первую, умноженную на 4, *а из третьей строки первую, умноженную на* 7. *Это приводит к матрице*

$$S_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Домножим вторую строку матрицы S_1 *на* $-\dfrac{1}{3}$*:*

$$S_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Наконец, вычтем из первой строки матрицы S_2 *вторую, умноженную на* 2 *и прибавим к третьей строке вторую, умноженную на* 6. *Получим матрицу*

$$S_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Дальше мы не можем выполнять алгоритм, поскольку на месте $(3,3)$ *стоит нулевой элемент. Это означает, что матрица* A *вырождена и потому не имеет обратную матрицу. На самом деле, мы могли бы прервать выполнение алгоритма и раньше, если заметить, что в матрице* S_1 *подстрока*

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

третьей строки может быть получена из подстроки

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

второй строки домножением на 2. *Иными словами, мы могли бы вычесть из третьей строки вторую, домноженную на* 2, *и получить*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В примерах, для большего понимания, мы подробно описывали действия алгоритма метода элементарных преобразований. Вместе с тем, можно использовать более экономную запись. Будем обозначать переход от одной расширенной матрицы к другой символом $\sim$, внизу и/или сверху которого кратко, при помощи символов I, II, III, описываются преобразования строк (символу I соответствует первая строка и т.д.). Представим преобразования Примера 4 в таких обозначениях.

Пример 7. *Пусть матрица A имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Проделаем следующую цепочку элементарных преобразований:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{переставим } I \text{ и } II}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{II-2I}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{(-\frac{1}{6})II}{\sim}$$

$$\overset{(-\frac{1}{6})II}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3} \end{array}\right) \overset{I-5II}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{5}{6} & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3} \end{array}\right) = (E|B).$$

Таким образом,

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{6} & -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}.$$