

Математический анализ

Модуль 4. Функции нескольких переменных

Текст 4.1

Аннотация

Типы множеств в n -мерном пространстве. Приближенные вычисления значений функций. Частные производные высших порядков.

1 Типы множеств

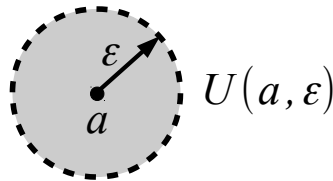
Определение

Совокупность всех точек $x \in R^n$ таких, что $\rho(x, a) < \varepsilon$, называется **n -мерным шаром** радиуса ε с центром в точке a или **ε -окрестностью** точки a .

Обозначение: $U(a, \varepsilon) = \{x | \rho(x, a) < \varepsilon\}$.

Пример:

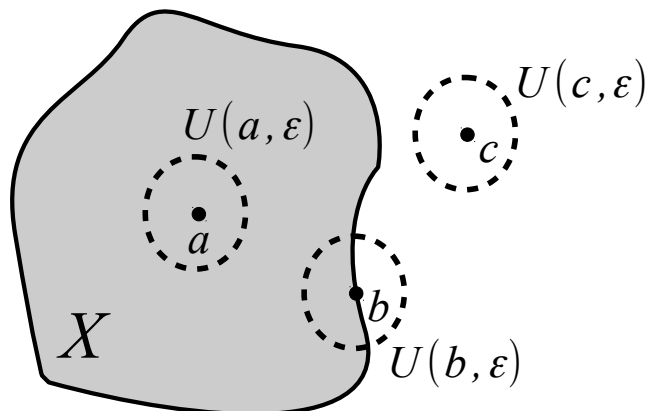
В пространстве R^2 (на плоскости) ε -окрестность $U(a, \varepsilon)$ представляет собой круг радиуса ε . Граничные точки в состав круга не входят, из-за чего на рисунках граница круга изображается пунктирной линией.



Определение

Пусть дано множество $X \subset R^n$. Точка $a \in X$ называется **внутренней точкой** этого множества, если она имеет ε -окрестность $U(a, \varepsilon)$, целиком лежащую в X .

Пример:

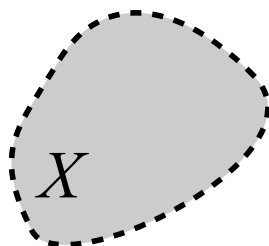


Здесь точка a является внутренней точкой множества X , т.к. ее ε -окрестность $U(a, \varepsilon)$ целиком лежит в X . Точки b и c **не** являются внутренними, т.к. $U(b, \varepsilon)$ лежит в X лишь частично, а $U(c, \varepsilon)$ располагается полностью за пределами X .

Определение

Множество, каждая точка которого является его внутренней точкой, называется **открытым**.

Пример:

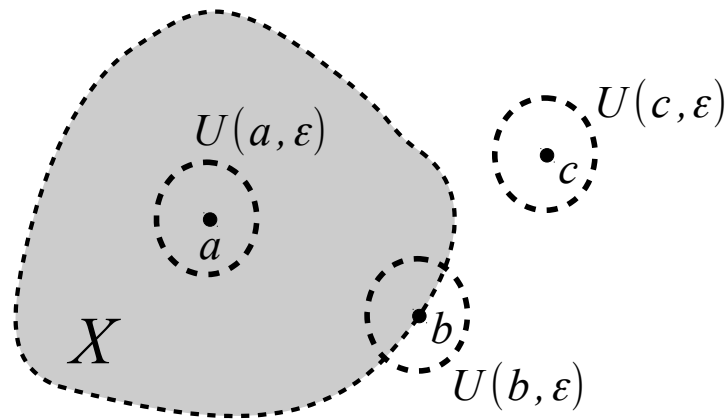


Граница открытого множества самому множеству не принадлежит. Поэтому ее изображают пунктирной линией.

Определение

Точка a называется **точкой прикосновения** множества X , если в любой ее ε -окрестности $U(a, \varepsilon)$ (при любом значении ε) содержится хотя бы одна точка множества X .

Пример:



На рисунке X - открытое множество, точки a и b - точки прикосновения множества X , точка c **не** является точкой прикосновения множества X , т.к. ε -окрестности $U(a, \varepsilon)$ и $U(b, \varepsilon)$ содержат точки из X , а $U(c, \varepsilon)$ целиком лежит вне X .

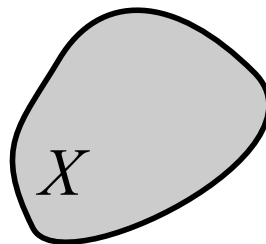
Определение

Совокупность всех точек прикосновения множества X называется **замыканием** множества X и обозначается: \overline{X} .

Определение

Множество X называется **замкнутым**, если $X = \overline{X}$.

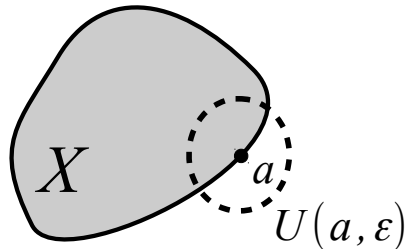
Пример:



Граница замкнутого множества принадлежит самому множеству. Поэтому ее изображают сплошной линией.

Определение

Точка a называется **граничной точкой** множества X , если любая ее ε -окрестность $U(a, \varepsilon)$ (при любом значении ε) содержит точки как принадлежащие множеству X , так и не принадлежащие ему.

Пример:

Точка a - граничная точка множества X , т.к. ее ε -окрестность $U(a, \varepsilon)$ частично находится внутри X и частично снаружи.

Определение

Множество всех граничных точек множества X называется **границей** множества X и обозначается ∂X .

Если X - открытое множество, то ∂X не принадлежит X . Если X - замкнутое множество, то ∂X принадлежит X .

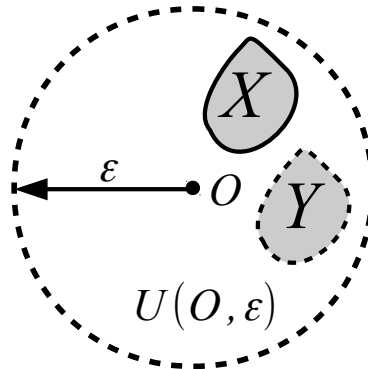
Определение

Множество X называется **ограниченным**, если существует некоторый n -мерный шар $U(O, \varepsilon)$ с центром в начале координат O такой, что $X \subset U(O, \varepsilon)$.

Определение

Множество X называется **компактом**, если оно замкнуто и ограничено.

Пример:



На рисунке множества X и Y находятся внутри $U(O, \varepsilon)$, а значит, они оба ограничены. Поскольку X - замкнутое множество, то X также является компактом. Множество Y открытое, следовательно оно компактом не является.

Определение

Множество X называется **линейно связным**, если любые две точки $x, y \in X$ можно соединить линией (не обязательно прямой), целиком лежащей в X .

Определение

Открытое линейно связное множество называется **областью**.

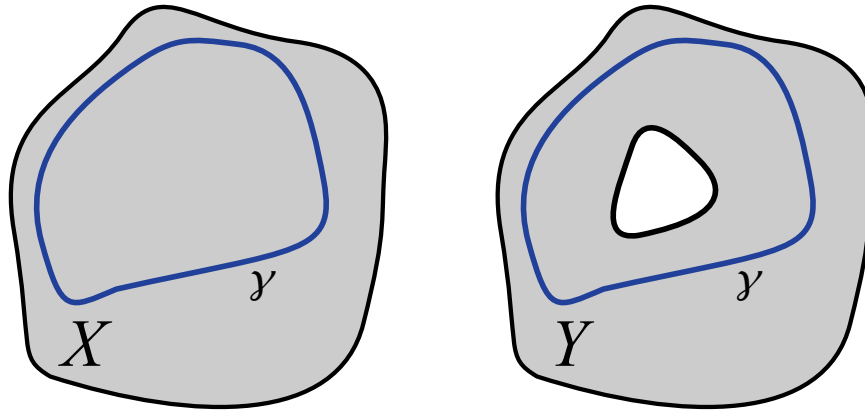
Определение

Замыкание области называется **замкнутой областью**.

Определение

Линейно связное множество X называется **односвязным**, если любую замкнутую кривую в этом множестве можно стянуть в точку, оставаясь внутри X . В противном случае X называется **многосвязным множеством**.

Пример:



Односвязное множество

Многосвязное множество

На рисунке каждое из множеств X и Y линейно связное, т.к. любые две точки этих множеств можно соединить линией, целиком лежащей в этих же множествах, причем линия может быть любой, а не только прямой. Внутри каждого множества выбрана произвольная замкнутая кривая γ . В множестве X эту кривую можно стянуть в точку, оставаясь внутри X . Следовательно, X - односвязное множество. В множестве Y стянуть кривую γ в точку, не выходя за пределы Y , нельзя. Этому мешает дырка внутри Y (множество точек, не принадлежащих Y и представленных на рисунке в виде белого выреза). Поэтому Y - многосвязное множество.

2 Приближенные вычисления

Пусть необходимо вычислить значение дифференцируемой функции $z = z(x, y)$ в точке (x, y) , при этом известно значение функции z в точке (a, b) .

Для дифференцируемой функции имеем:

$$\Delta z = \frac{\partial z(a, b)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z(a, b)}{\partial y} \Delta y + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\Delta z = z(x, y) - z(a, b)$, $\Delta x = x - a$, $\Delta y = y - b$.

Отбросив $o(\rho)$, получаем

$$z(x, y) - z(a, b) \approx \frac{\partial z(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial z(a, b)}{\partial y}(y - b)$$

или

$$z(x, y) \approx z(a, b) + \frac{\partial z(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial z(a, b)}{\partial y}(y - b).$$

Последнюю формулу можно использовать для приближенных вычислений значений функции $z = z(x, y)$ в точках, расположенных рядом с точкой (a, b) . Чем ближе точка (x, y) к (a, b) , тем точнее результат.

3 Частные производные высших порядков

Определение

Частная производная по переменной x_j от функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ называется **частной производной 2-ого порядка** функции $f(x)$ по переменным x_i и x_j .

$$\text{Обозначение: } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f''_{x_i x_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)'_{x_j}.$$

Если $i = j$, то частная производная называется **чистой** и вместо $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ пишут $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Если $i \neq j$, то частная производная называется **смешанной**.

Теорема (о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования)

Пусть функция $u = f(x)$ имеет в окрестности точки a частные производные 1-ого и 2-ого порядков

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1, \dots, n,$$

причем частные производные 2-ого порядка непрерывны в точке a . Тогда

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i},$$

т.е. значения частных производных 2-ого порядка в точке a не зависят от последовательности переменных, по которым идет дифференцирование.

Определение

Частной производной n -ого порядка называется частная производная от частной производной $(n - 1)$ -ого порядка.

Пример:
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{x_i}'.$$