

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ
Модуль 4. Функции нескольких переменных
Лекция 4.4

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Векторная функция скалярного аргумента



Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Векторной функцией скалярного аргумента называется функция, значениями которой являются векторы, а аргументами - числа.



Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Векторной функцией скалярного аргумента называется функция, значениями которой являются векторы, а аргументами - числа.

Обозначение: $\vec{r}(t)$



Векторная функция скалярного аргумента

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:



Векторная функция скалярного аргумента

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$



Векторная функция скалярного аргумента

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Если $z(t) = 0 \forall t$, то пишут:



Векторная функция скалярного аргумента

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Если $z(t) = 0 \forall t$, то пишут:

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t)).$$



Векторная функция скалярного аргумента

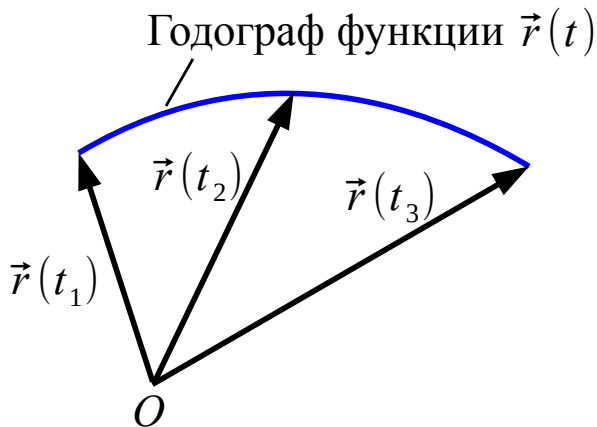
Определение

Пусть векторы $\vec{r}(t)$ при всех значениях аргумента t приложены к одной точке O .

Линия, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{r}(t)$ при непрерывном изменении t , называется **годографом** функции $\vec{r}(t)$.



Векторная функция скалярного аргумента



Векторная функция скалярного аргумента

Поместим начало декартовой системы координат в точку O . Тогда в этой системе координат годограф задается системой функций:



Векторная функция скалярного аргумента

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad - \text{ в пространстве}$$



Векторная функция скалярного аргумента

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{- в пространстве}$$

или

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{- на плоскости,}$$



Векторная функция скалярного аргумента

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad - \text{ в пространстве}$$

или

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad - \text{ на плоскости,}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - координаты векторной функции $\vec{r}(t)$



Предел и непрерывность



Определение

Вектор \bar{a} называется **пределом** векторной функции $\bar{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{r}(t) - \bar{a}| = 0.$$



Определение

Вектор \bar{a} называется **пределом** векторной функции $\bar{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{r}(t) - \bar{a}| = 0.$$

Обозначение:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}.$$



Предел и непрерывность

Здесь $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$ - модуль вектора,



Предел и непрерывность

Здесь $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$ - модуль вектора,

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| =$$



Здесь $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$ - модуль вектора,

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| =$$

$$= \sqrt{(x(t) - a_x)^2 + (y(t) - a_y)^2 + (z(t) - a_z)^2}$$



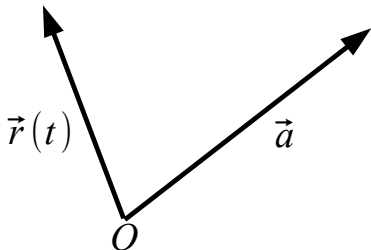
Предел и непрерывность

При $t \rightarrow t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор \vec{a} .



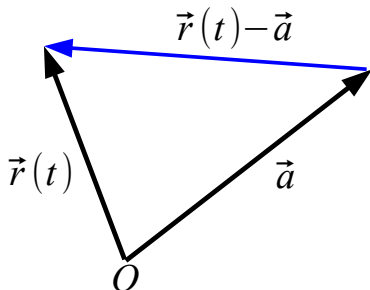
Предел и непрерывность

При $t \rightarrow t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор \vec{a} .



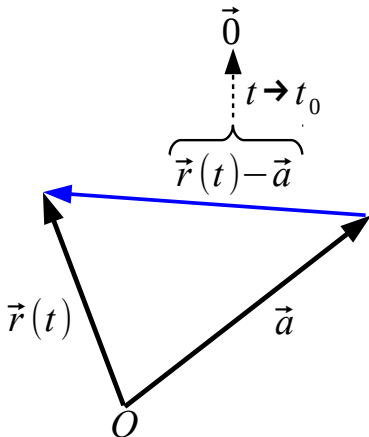
Предел и непрерывность

При $t \rightarrow t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор \vec{a} .



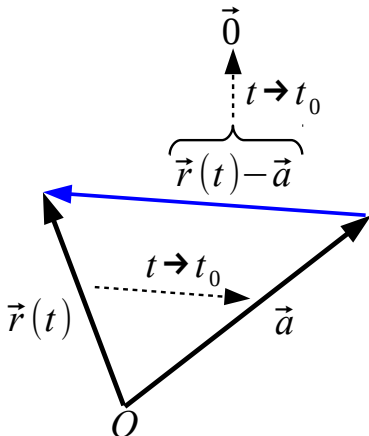
Предел и непрерывность

При $t \rightarrow t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор \vec{a} .



Предел и непрерывность

При $t \rightarrow t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор \vec{a} .



Теорема (о пределе в координатной форме)



Теорема (о пределе в координатной форме)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_x \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_y \\ \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_z \end{cases}$$



Определение

Векторная функция $\bar{r}(t)$ называется **непрерывной** в точке t_0 , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}(t_0).$$



Определение

Векторная функция $\bar{r}(t)$ называется **непрерывной** в точке t_0 , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}(t_0).$$

Обозначение: $\bar{r}(t) \in C(t_0)$.



Теорема (о непрерывности в координатной форме)



Теорема (о непрерывности в координатной форме)

$$\bar{r}(t) \in C(t_0) \Leftrightarrow \begin{aligned} x(t) &\in C(t_0) \\ y(t) &\in C(t_0) \\ z(t) &\in C(t_0) \end{aligned}$$



Предел и непрерывность

Свойства пределов векторных функций:



Предел и непрерывность

Свойства пределов векторных функций:

1) если $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$,



Предел и непрерывность

Свойства пределов векторных функций:

1) если $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{r}(t)| = |\bar{a}|$,

2) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) + \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$,



Предел и непрерывность

Свойства пределов векторных функций:

- 1) если $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{r}(t)| = |\bar{a}|$,
- 2) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) + \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$,
- 3) $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)\bar{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t)$,



Предел и непрерывность

Свойства пределов векторных функций:

- 1) если $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{r}(t)| = |\bar{a}|$,
- 2) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) + \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$,
- 3) $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)\bar{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t)$,
- 4) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) \cdot \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$,



Предел и непрерывность

Свойства пределов векторных функций:

- 1) если $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{r}(t)| = |\bar{a}|$,
- 2) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) + \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$,
- 3) $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)\bar{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t)$,
- 4) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) \cdot \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$,
- 5) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) \times \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$



Предел и непрерывность

Свойства пределов векторных функций:

- 1) если $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{r}(t)| = |\bar{a}|$,
- 2) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) + \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$,
- 3) $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)\bar{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t)$,
- 4) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) \cdot \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$,
- 5) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) \times \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$

Здесь \cdot - скалярное произведение
и \times - векторное произведение.



Производная векторной функции



Производная векторной функции

Определение

Производной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$



Производная векторной функции

Определение

Производной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



Производная векторной функции

Определение

Производной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Обозначение: $\vec{r}'(t_0)$.



Производная векторной функции

Теорема (о существовании производной векторной функции)



Производная векторной функции

Теорема (о существовании производной векторной функции)

$$\exists \vec{r}'(t_0) \Leftrightarrow \exists x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0),$$

причем $\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$



Производная векторной функции

Геометрический смысл производной:



Производная векторной функции

Геометрический смысл производной:

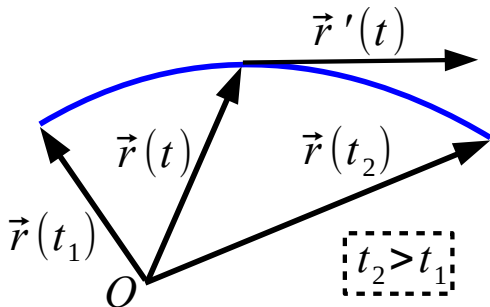
Производная $\vec{r}'(t)$ - это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t .



Производная векторной функции

Геометрический смысл производной:

Производная $\vec{r}'(t)$ - это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t .



Производная векторной функции

Так как $\vec{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$, то уравнение касательной к этой кривой в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ имеет вид:



Производная векторной функции

Так как $\vec{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$, то уравнение касательной к этой кривой в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ имеет вид:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$



Производная векторной функции

Физический смысл производной:



Производная векторной функции

Физический смысл производной:

Производная $\vec{r}'(t)$ - это вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции $\vec{r}(t)$.



Производная векторной функции

Правила дифференцирования:



Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

$$1) (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)' = \bar{r}'_1 + \bar{r}'_2$$



Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

$$1) (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)' = \bar{r}'_1 + \bar{r}'_2$$

$$2) (f\bar{r})' = f'\bar{r} + f\bar{r}'$$



Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

$$1) (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)' = \bar{r}'_1 + \bar{r}'_2$$

$$2) (f\bar{r})' = f'\bar{r} + f\bar{r}'$$

$$3) (\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2)' = \bar{r}'_1 \cdot \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \cdot \bar{r}'_2$$



Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

$$1) (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)' = \bar{r}'_1 + \bar{r}'_2$$

$$2) (f\bar{r})' = f'\bar{r} + f\bar{r}'$$

$$3) (\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2)' = \bar{r}'_1 \cdot \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \cdot \bar{r}'_2$$

$$4) (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2)' = \bar{r}'_1 \times \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \times \bar{r}'_2$$



Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

$$1) (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)' = \bar{r}'_1 + \bar{r}'_2$$

$$2) (f\bar{r})' = f'\bar{r} + f\bar{r}'$$

$$3) (\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2)' = \bar{r}'_1 \cdot \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \cdot \bar{r}'_2$$

$$4) (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2)' = \bar{r}'_1 \times \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \times \bar{r}'_2$$

Здесь \cdot - скалярное произведение,

\times - векторное произведение,

$f = f(t)$ - обычная функция.



Векторная функция постоянной длины



Векторная функция постоянной длины

Теорема (о производной векторной функции постоянной длины)



Векторная функция постоянной длины

Теорема (о производной векторной функции постоянной длины)

Если длина вектора $\vec{r}(t)$ постоянна, то он ортогонален своей производной и

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0.$$


Векторная функция постоянной длины

Геометрически конец вектора $\vec{r}(t)$ все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке O , сам же он служит радиус-вектором этой сферы. Производная от этого вектора направлена по касательной к сфере. На плоскости сфера переходит в круг.

