Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 4. Функции нескольких переменных

Лекция 4.2

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Производная сложной функции

Производная сложной функции

Рассмотрим сложную функцию одной переменной

$$y = f(x(t)),$$

Рассмотрим сложную функцию одной переменной

$$y = f(x(t)),$$

где t - независимая переменная, x - промежуточная переменная и y - зависимая переменная.

Производная сложной функции

Графически структуру данной функции можно представить в виде схемы зависимостей

$$y \;—\; x \;—\; t$$

Производная сложной функции

Графически структуру данной функции можно представить в виде схемы зависимостей

$$y \;—\; x \;—\; t$$

в которой черточками показаны функциональные зависимости $y = f(x)$ и $x = x(t)$.

Производная сложной функции

Теперь рассмотрим сложную функцию нескольких переменных

$$u = f(x_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_k)),$$

Производная сложной функции

Теперь рассмотрим сложную функцию нескольких переменных

$$u = f(x_1(t_1, ..., t_k), ..., x_n(t_1, ..., t_k)),$$

где $t_1, ..., t_k$ - независимые переменные,

$x_1, ..., x_n$ - промежуточные переменные,

u - зависимая переменная.

Связь между u и $x_1, \ldots, x_n$ задается функцией n переменных

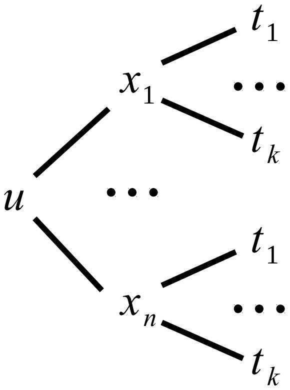
$$u = f(x_1, \ldots, x_n),$$

Производная сложной функции

Связь между u и $x_1, \ldots, x_n$ задается функцией n переменных
$$u = f(x_1, \ldots, x_n),$$
а зависимость $x_1, \ldots, x_n$ от $t_1, \ldots, t_k$ определяется функциями k переменных
$$x_i = x_i(t_1, \ldots, t_k),\ i = 1, \ldots, n.$$

Производная сложной функции

Схема зависимостей, отображающая структуру данной функции, имеет следующий вид:



Производная сложной функции

Теорема (производная сложной функции нескольких переменных)

Производная сложной функции

Теорема (производная сложной функции нескольких переменных)
Пусть функции k переменных $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_k)$, $i = 1, \ldots, n$ непрерывны в точке $a = (a_1, \ldots, a_k)$ и имеют в ней все свои частные производные первого порядка,

Теорема (производная сложной функции нескольких переменных)

Пусть функции k переменных $x_i = x_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, \dots, n$ непрерывны в точке $a = (a_1, \dots, a_k)$ и имеют в ней все свои частные производные первого порядка, а функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке $b = (b_1, \dots, b_n)$, где $b_i = x_i(a_1, \dots, a_k)$, $i = 1, \dots, n$.

Производная сложной функции

Теорема (производная сложной функции нескольких переменных)

Тогда в точке a сложная функция

$$u = f(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k))$$

имеет частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j},$$

$$j = 1, 2, \dots, k.$$

Частные случаи сложных функций:

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

1) $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

1) $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

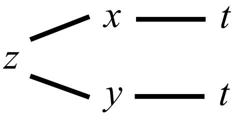
Схема зависимостей:

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r, dash] & t \\ z \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ & y \arrow[r, dash] & t \end{tikzcd}$$

Частные случаи сложных функций:

1) $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Схема зависимостей:



Производная:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

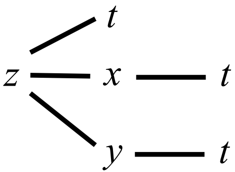
2) $z = z(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

2) $z = z(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Схема зависимостей:

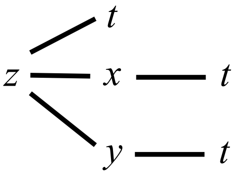


Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

2) $z = z(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Схема зависимостей:



Производная:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Частные случаи сложных функций:

Здесь dz/dt называют полной производной функции z по переменной t, которая учитывает, что x и y - это некоторые функции от t,

Частные случаи сложных функций:

Здесь dz/dt называют полной производной функции z по переменной t, которая учитывает, что x и y - это некоторые функции от t, а $\partial z/\partial t$ - частной производной функции z по переменной t в предположении, что x и y - это независимые переменные.

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

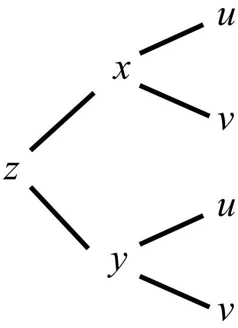
3) $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

3) $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Схема зависимостей:



Частные случаи сложных функций:

3) $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Производные:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Дифференциал

Дифференциал

Пусть функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Дифференциал

Пусть функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Тогда ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + \circ(\rho), \rho \to 0.$$

Дифференциал

Определение

Линейная функция

$$A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \dots + A_n\Delta x_n$$

переменных $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ называется **дифференциалом** (**полным дифференциалом**, **дифференциалом первого порядка**) функции $f(x)$ в точке a.

Определение

Линейная функция

$$A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n$$

переменных $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ называется **дифференциалом** (**полным дифференциалом**, **дифференциалом первого порядка**) функции $f(x)$ в точке a.

Обозначение: $df(a)$

Введя обозначения $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, ..., $dx_n = \Delta x_n$

Введя обозначения $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, ..., $dx_n = \Delta x_n$ и вспомнив из необходимого условия дифференцируемости, что

$$A_1 = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, A_n = \frac{\partial f(a)}{\partial x_n},$$

Дифференциал

Введя обозначения $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, ..., $dx_n = \Delta x_n$ и вспомнив из необходимого условия дифференцируемости, что

$$A_1 = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \ldots, A_n = \frac{\partial f(a)}{\partial x_n},$$

получим:

$$df(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} dx_n.$$

Правила вычисления дифференциала функции нескольких переменных аналогичны правилам вычисления дифференциала функции одной переменной. Например, $d(f+g)=df+dg$, $d(c\cdot f)=c\cdot df$, где c - константа.

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Рассмотрим сложную функцию $z = z(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Здесь u, v - независимые переменные, x, y - промежуточные переменные.

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$dz =$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \right) dv$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$
$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Получаем

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Получаем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Получаем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Свойство инвариантности означает, что форма дифференциала не зависит от того, для каких переменных (промежуточных или независимых) он выписан.

Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом второго порядка функции $f(x)$ в точке a называется квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Определение

Дифференциалом второго порядка функции $f(x)$ в точке a называется квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Обозначение: $d^2 f(a)$.

Определение

Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$.

Определение

Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$.

Обозначение: $d^n f$

Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$.

Обозначение: $d^n f = d(d^{n-1}f)$.

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

дифференциал первого порядка:

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

дифференциал первого порядка:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

дифференциал первого порядка:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

дифференциал второго порядка:

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

дифференциал первого порядка:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

дифференциал второго порядка:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

дифференциал третьего порядка:

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

дифференциал третьего порядка:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy +$$
$$+3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

дифференциал второго порядка:

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

дифференциал второго порядка:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz.$$

Получим выражение второго дифференциала d^2z для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

Дифференциалы высших порядков

Получим выражение второго дифференциала d^2z для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

$d^2z =$

Получим выражение второго дифференциала d^2z для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

$$d^2z = d(dz) =$$

Дифференциалы высших порядков

Получим выражение второго дифференциала d^2z для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

Дифференциалы высших порядков

Получим выражение второго дифференциала d^2z для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

Получим выражение второго дифференциала d^2z для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy =$$

Дифференциалы высших порядков

$=$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right) dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right) dy =$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right| =$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right) dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right) dy =$$
$$= \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right| =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Задача о полном дифференциале

Задача о полном дифференциале

Пусть дано выражение

$$w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Задача о полном дифференциале

Пусть дано выражение

$$w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Величина w не всегда является дифференциалом какой-либо функции.

Задача о полном дифференциале

Пусть дано выражение

$$w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Величина w не всегда является дифференциалом какой-либо функции. Рассмотрим условия, при которых w будет дифференциалом функции.

Задача о полном дифференциале

Теорема (необходимое условие полного дифференциала)

Теорема (необходимое условие полного дифференциала)
Если в области D выражение w является полным дифференциалом некоторой функции, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Теорема (достаточное условие полного дифференциала)

Задача о полном дифференциале

Теорема (достаточное условие полного дифференциала)

Если в односвязной области D выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то выражение w является полным дифференциалом.