# Математический анализ
# Модуль 4. Функции нескольких переменных
# **Лекция 4.4**

**Аннотация**

Векторная функция скалярного аргумента, ее предел и производная. Векторная функция постоянной длины.

## 1 Векторная функция скалярного аргумента

*Определение*

**Векторной функцией скалярного аргумента** называется функция, значениями которой являются векторы, а аргументами - числа.

Обозначение: $\overline{r}(t)$

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:

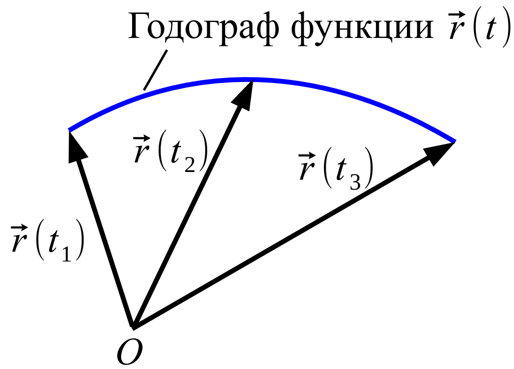
$$\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Если $z(t) = 0\ \forall t$, то пишут:

$$\overline{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

*Определение*

Пусть векторы $\overline{r}(t)$ при всех значениях аргумента $t$ приложены к одной точке $O$. Линия, описываемая в пространстве концом вектора $\overline{r}(t)$ при непрерывном изменении $t$, называется **годографом** функции $\overline{r}(t)$.




Поместим начало декартовой системы координат в точку $O$. Тогда в этой системе координат годограф задается системой функций:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{- в пространстве}$$

или

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{- на плоскости,}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - координаты векторной функции $\overline{r}(t)$

# 2 Предел и непрерывность

*Определение*

Вектор $\overline{a}$ называется **пределом** векторной функции $\overline{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} |\overline{r}(t) - \overline{a}| = 0.$$

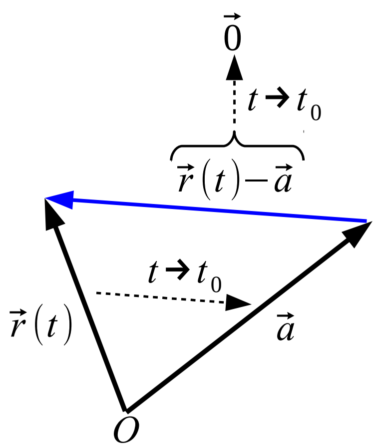
Обозначение:

$$\lim_{t \to t_0} \overline{r}(t) = \overline{a}.$$

Здесь $|\overline{r}(t)-\overline{a}|$ - модуль вектора,

$$|\overline{r}(t)-\overline{a}|=\sqrt{(x(t)-a_x)^2+(y(t)-a_y)^2+(z(t)-a_z)^2}.$$

При $t\to t_0$ вектор $\overline{r}(t)-\overline{a}$ переходит в нулевой вектор $\overline{0}$, что соответствует переходу вектора $\overline{r}(t)$ в вектор $\overline{a}$.




*Теорема (о пределе в координатной форме)*

$$\lim_{t\to t_0}\overline{r}(t)=\overline{a}\Leftrightarrow\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=a_x\\ \lim\limits_{t\to t_0}y(t)=a_y\\ \lim\limits_{t\to t_0}z(t)=a_z\end{array}$$

*Определение*

Векторная функция $\overline{r}(t)$ называется **непрерывной** в точке $t_0$, если

$$\lim_{t\to t_0}\overline{r}(t)=\overline{r}(t_0).$$

Обозначение: $\overline{r}(t)\in C(t_0)$.

*Теорема (о непрерывности в координатной форме)*

$$\overline{r}(t) \in C(t_0) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x(t) \in C(t_0) \\ y(t) \in C(t_0) \\ z(t) \in C(t_0) \end{array}$$

*Свойства пределов векторных функций:*

1) если $\lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}(t) = \overline{a}$, то $\lim\limits_{t \to t_0} |\overline{r}(t)| = |\overline{a}|$,

2) $\lim\limits_{t \to t_0} (\overline{r}_1(t) + \overline{r}_2(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}_1(t) + \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}_2(t)$,

3) $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)\overline{r}(t) = \lim\limits_{t \to t_0} f(t) \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}(t)$,

4) $\lim\limits_{t \to t_0} (\overline{r}_1(t) \cdot \overline{r}_2(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}_1(t) \cdot \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}_2(t)$,

5) $\lim\limits_{t \to t_0} (\overline{r}_1(t) \times \overline{r}_2(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}_1(t) \times \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}_2(t)$

Здесь $\cdot$ - скалярное произведение и $\times$ - векторное произведение.

# 3 Производная векторной функции

*Определение*

**Производной** функции $\overline{r}(t)$ в точке $t_0$ называется предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}$$

Обозначение: $\overline{r}'(t_0)$.

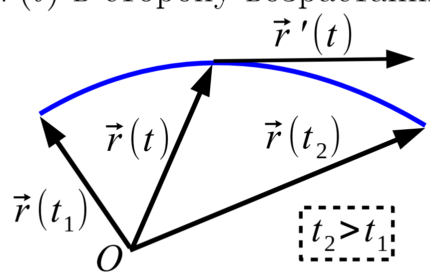
*Теорема (о существовании производной векторной функции)*

$$\exists \overline{r}'(t_0) \Leftrightarrow \exists x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0),$$

причем $\overline{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

*Геометрический смысл производной:*

Производная $\overline{r}'(t)$ - это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\overline{r}(t)$ в сторону возрастания параметра $t$.




Так как $\overline{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу функции $\overline{r}(t)$, то уравнение касательной к этой кривой в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ имеет вид:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

*Физический смысл производной:*

Производная $\overline{r}'(t)$ - это вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции $\overline{r}(t)$.

*Правила дифференцирования:*

1) $(\overline{r}_1 + \overline{r}_2)' = \overline{r}_1' + \overline{r}_2'$
2) $(f\overline{r})' = f'\overline{r} + f\overline{r}'$
3) $(\overline{r}_1 \cdot \overline{r}_2)' = \overline{r}_1' \cdot \overline{r}_2 + \overline{r}_1 \cdot \overline{r}_2'$
4) $(\overline{r}_1 \times \overline{r}_2)' = \overline{r}_1' \times \overline{r}_2 + \overline{r}_1 \times \overline{r}_2'$

Здесь $\cdot$ - скалярное произведение, $\times$ - векторное произведение, $f = f(t)$ - обычная функция.

# 4 Векторная функция постоянной длины

*Теорема (о производной векторной функции постоянной длины)*

Если длина вектора $\overline{r}(t)$ постоянна, то он ортогонален своей производной и $\overline{r}(t) \cdot \overline{r}'(t) = 0$.

Геометрически конец вектора $\overline{r}(t)$ все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке $O$, сам же он служит радиус-вектором этой сферы. Производная от этого вектора направлена по касательной к сфере. На плоскости сфера переходит в круг.