

Математический анализ

Модуль 4. Функции нескольких переменных

Лекция 4.3

Аннотация

Формула Тейлора. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие. Достаточные условия по второму дифференциалу и угловым минорам. Пошаговые алгоритмы поиска точек экстремума для функций двух и трех переменных.

1 Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно в окрестности точки a . Тогда справедлива **формула Тейлора m -ого порядка**

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a) + \frac{1}{2!}d^2f(a) + \dots + \frac{1}{m!}d^m f(a) + r_m.$$

Определение

Многочлен $P_m(x) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!}d^i f(a)$ называется **многочленом Тейлора степени m** .

Замечание

$d^i f(a)$ - дифференциал функции $f(x)$ порядка i в точке a . Считается, что $d^0 f(a) = f(a)$ и $0! = 1$.

Определение

Величина $r_m = f(x) - P_m(x)$ называется **остаточным членом** формулы Тейлора.

Остаточный член r_m можно записать в форме Пеано

$$r_m = o(\rho^m), \text{ где } \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}.$$

Формула Тейлора второго порядка функции двух переменных $z = z(x, y)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} z(x, y) = & z(a_x, a_y) + \frac{\partial z(a_x, a_y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z(a_x, a_y)}{\partial y} \Delta y + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z(a_x, a_y)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 z(a_x, a_y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 z(a_x, a_y)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) + \\ & + o(\rho^2), \rho \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\Delta x = x - a_x$, $\Delta y = y - a_y$.

2 Экстремум

Определение

Точка a называется **точкой строгого максимума (минимума)** функции $f(x)$, если $\exists U(a) \forall x \in U(a), x \neq a: f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$).

Определение

Точки строгого максимума и минимума называются **точками строгого экстремума**.

Определение

Точка a называется **стационарной точкой** функции $f(x)$, если функция $f(x)$ дифференцируема в этой точке, и все ее частные производные первого порядка равны нулю в этой точке.

Теорема (необходимое условие строгого экстремума)

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a , и точка a является точкой строгого максимума (минимума) функции $f(x)$. Если в точке a существуют частные производные первого порядка, то они равны нулю:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1, n}.$$

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по второму дифференциалу)

Пусть функция $f(x)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки a , которая является стационарной точкой функции $f(x)$. Тогда

1) если квадратичная форма $d^2 f(a)$ положительно определена, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j > 0 \text{ при } dx_1^2 + \dots + dx_n^2 > 0,$$

то a - точка строгого минимума,

2) если квадратичная форма $d^2 f(a)$ отрицательно определена, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j < 0 \text{ при } dx_1^2 + \dots + dx_n^2 > 0,$$

то a - точка строгого максимума,

3) если квадратичная форма $d^2 f(a)$ знакопеременна, то a не является точкой локального экстремума.

Определение

Матрицей Гессе $D^2 f$ называется матрица вторых частных производных функции $f(x)$:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Определение

Угловыми минорами матрицы Гессе называются определители вида

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \det(D^2 f).$$

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам)

Пусть $f(x)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки a , которая является стационарной точкой функции $f(x)$. Тогда

- 1) если $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$, то a - точка строгого минимума,
- 2) если $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$, то a - точка строгого максимума,
- 3) если $D^2 f$ невырождена и не выполняются условия (1) и (2), то a не является точкой локального экстремума,
- 4) если $D^2 f$ вырождена, то что-либо о точке a сказать нельзя.

Алгоритм поиска точек экстремума
для функции двух переменных $z = z(x, y)$

1. Используя необходимое условие, находим стационарные точки.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1, M_2, \dots$$

2. Для каждой стационарной точки составляем матрицу Гессе.

$$D^2z = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

3. Для каждой матрицы Гессе вычисляем угловые миноры.

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума.

- а) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ - точка минимума
- б) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$ - точка максимума
- в) $\Delta_2 < 0$ - точка не является точкой экстремума
- г) $\Delta_2 = 0$ - что-либо о точке сказать нельзя

Алгоритм поиска точек экстремума
для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$

1. Используя необходимое условие, находим стационарные точки.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1, M_2, \dots$$

2. Для каждой стационарной точки составляем матрицу Гессе.

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

3. Для каждой матрицы Гессе вычисляем угловые миноры.

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \det(D^2 f)$$

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума.

- а) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ - точка минимума
- б) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$ - точка максимума
- в) $\Delta_3 \neq 0$, но условия (а) и (б) не выполняются - точка не является точкой экстремума
- г) $\Delta_3 = 0$ - что-либо о точке сказать нельзя