Математический анализ
Модуль 4. Функции нескольких переменных
Лекция 4.1

Аннотация

Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность. Частные производные первого порядка. Дифференцируемость.

1 Функция нескольких переменных

Определение

Множество всевозможных упорядоченных последовательностей n действительных чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется **n-мерным точечным арифметическим пространством $\mathbf{R^n}$**.

Определение

Елементы множества R^n называются **точками n-мерного пространства**.

Обозначение: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Определение

Число x_i называется **i-ой координатой** точки x.

Примеры:

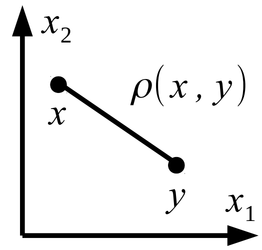
R^2 - множество точек двухмерной плоскости,

R^3 - множество точек трехмерного пространства.

Расстояние между двумя точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ обозначается $\rho(x, y)$ и вычисляется по формуле:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

Пример:



Определение

Пусть задано множество $E \subset R^n$. Если каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ поставлено в соответствие число $u \in R$, то говорят, что на множестве E задана **функция n переменных** $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (или $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$).

Определение

Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются **независимыми** переменными, u - **зависимой**, а множество E - **областью определения** функции f.

Примеры:

1) функция двух переменных

$$u = x_1^2 + x_2^2,$$

2) функция трех переменных

$$u = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3.$$

Определение

Множество точек $(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих уравнению

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = C,$$

где C - некоторая постоянная, называется **множеством уровня** функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, соответствующим значению C.

Частные случаи:

При $n = 2$ множество уровня называется линией уровня.

При $n = 3$ множество уровня называется поверхностью уровня.

Пример:

Ниже на рисунке слева для функции $u = x_1^2 + x_2^2$ показан ее график (эллиптический параболоид), на котором выделены точки со значениям $u = C_1$ и $u = C_2$. Спроецировав образуемые ими линии на плоскость Ox_1x_2, получим линии уровня этой функции, соответствующие значениям C_1 и C_2 (рисунок справа).

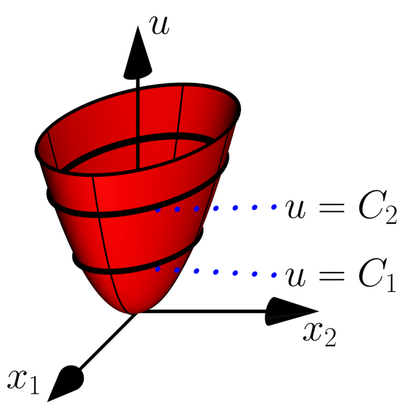
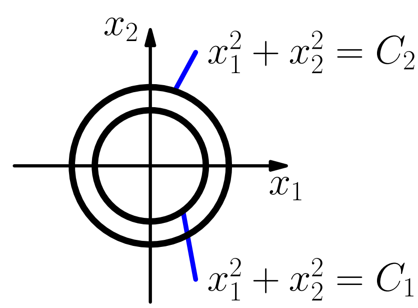


График функции



Линии уровня

2 Предел и непрерывность

Пусть дана функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ с областью определения E.

Предел функции нескольких переменных определяется аналогично пределу функции одной переменной как число, к которому приближается функция $f(x)$, когда ее аргумент x стремится к некоторой точке $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Определение (в терминах неравенств для конечных точек)

Конечное число b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \to a$, где a - конечная точка, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in E, 0 < \rho(x,a) < \delta(\varepsilon) : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \ldots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = b.$

Определение

Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Определение

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на множестве** X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Свойства непрерывных функций нескольких переменных аналогичны свойствам непрерывных функций одной переменной. В частности, элементарные функции нескольких переменных непрерывны всюду, где они определены.

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

3 Частные производные

Рассмотрим функцию 2-х переменных $u = f(x_1, x_2)$, которая определена в некоторой окрестности точки $a = (a_1, a_2)$.

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2)$ в точке $a = (a_1, a_2)$ по переменной x_1 называется предел

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(a_1 + \Delta x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_1}.$$

Обозначение: $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$, $f'_{x_1}(a_1, a_2)$, $f'_{x_1}(a)$.

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2)$ в точке $a = (a_1, a_2)$ по переменной x_2 называется предел

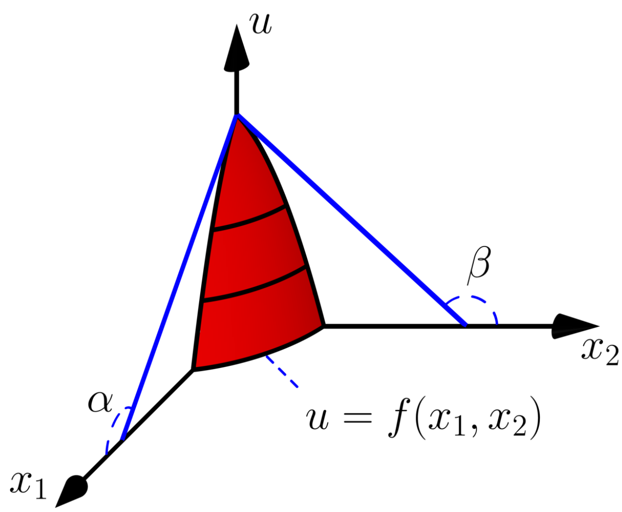
$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_2}.$$

Обозначение: $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}$, $f'_{x_2}(a_1, a_2)$, $f'_{x_2}(a)$.

Геометрическая интерпретация

$\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$ – это тангенс угла наклона касательной к графику функции $u = f(x_1, x_2)$ в точке $a = (a_1, a_2)$, проведенной в направлении оси Ox_1.

$\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}$ – это тангенс угла наклона касательной к графику функции $u = f(x_1, x_2)$ в точке $a = (a_1, a_2)$, проведенной в направлении оси Ox_2.



$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

Теперь рассмотрим функцию n переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ по переменной x_i называется предел

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_n)}{\Delta x_i}.$$

Обозначение: $\dfrac{\partial f(a_1, a_2, ..., a_n)}{\partial x_i}$, $f'_{x_i}(a_1, a_2, ..., a_n)$, $f'_{x_i}(a)$.

Данная частная производная также называется **частной производной первого порядка**.

4 Дифференцируемость

Определение

Функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ называется **дифференцируемой** в точке $a = (a_1, ..., a_n)$, если существуют числа A_1, ..., A_n, такие, что

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + \circ(\rho), \rho \to 0,$$

где

$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_n^2}$,

$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, ..., a_n + \Delta x_n) - f(a_1, ..., a_n)$ – полное приращение функции.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости)

Если функция $u = f(x)$ дифференцируема в точке a, то в этой точке существуют все ее частные производные первого порядка, причем

$$A_1 = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, ..., A_n = \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}.$$

Теорема (достаточное условие дифференцируемости)

Пусть в некоторой окрестности точки a существуют частные производные первого порядка, которые непрерывны в самой точке a. Тогда функция $u = f(x)$ дифференцируема в точке a.

Теорема (о непрерывности)

Если функция $u = f(x)$ дифференцируема в точке a, то она непрерывна в ней.

Определение

Функция называется **непрерывно дифференцируемой** в точке a, если она имеет в этой точке непрерывные частные производные первого порядка.